Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 10, стр. 594 – 599 *20 мая 1978 г.*

ВЫСОКИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЯНГ-МИЛЛСОВСКОЙ МОДЕЛИ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

А.П.Бухвостов, Л.Н.Липатов, Е.И.Малков

В модели скалярного поля, взаимодействующего с полями Янга – Миллса, исследованы конфигурации полей, дающие наибольший вклад в высокие порядки теории возмущений по константе взаимодействия скалярного поля λ и янг-миллсовской константы g. Оценивается вклад этих конфигураций в разложение функций Грина.

Недавно с помощью метода, развитового в работе [1], были найдены коэффициенты разложения функций Грина в высоких порядках теории возмущений для скалярных моделей теории поля [1, 2], скалярной электродинамики [3, 4] теории Янга – Миллса [5] и в фермионных моделях [6]. При применении этого метода необходимо выбрать решение классических уравнений, дающее наибольший вклад в функциональный интеграл. В случае скалярных моделей [1, 2] было показано [3], используя неравенство Соболева [7], что таким свойством обладает сферически-симметричное решение. В работе [4] был предложен метод нахождения формы решения для системы взаимодействующих полей, обеспечивающий оптимальность решения в области, где теория незначительно отличается от случая чисто скалярного поля.

Здесь этот метод применяется к теории полей Янга – Миллса A_μ^a, взаимодействующих с изодублетом скалярных мезонов ϕ. Эвклидовское действие для этой модели имеет вид

$$S = \int L d^4 x, \quad L = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + |(\partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau^a A_\mu^a) \phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4.$$

Массовый член опущен в формуле (1), так как мы будем рассматривать функции Грина на малых расстояниях.

В соответствии с работой [1] перевальные значения для полей $\tilde{A}_\mu^a$, $\tilde{\phi}$ и для констант $\tilde{g}$ и $\tilde{\lambda}$ в функциональном интеграле для коэффициентов разложения $G_n^{(k,m)}$ функций Грина

$$G_n = \sum_{km} \lambda^k g^{2m} G_n^{(k,m)} \tag{2}$$

определяются из условия экстремальности функционала J:

$$\delta J = 0, \quad J = S + m \ln g^2 + k \ln \lambda . \tag{3}$$

Выберем решение классических уравнений с центром в нуле и единичным масштабом. Удобно при этом отобразить четырехмерное пространство на поверхность единичной сферы в пятимерном пространстве [8]:

$$z_\mu = \frac{2x_\mu}{x^2+1}, \quad z_5 = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad dS_5 = \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^4 d^4x, \quad A_\mu^a = \frac{\partial z_i}{\partial x_\mu} A_i^a(z),$$

$$\phi(x) = \frac{2}{1+x^2} Y(z). \tag{4}$$

На пятикомпонентный вектор $A_i^a(z)$ можно наложить два дополнительных условия

$$Z_i A_i^a = 0, \quad (\partial_i - z_i (z\partial) A_i^a = 0; \tag{5}$$

второе условие фиксирует калибровку. Подстановка (4) в (1) приводит действие к виду, инвариантному относительно 10-параметрической группы вращений сферы.

В соответствии с методом работы [4] поиск решений (3) начнем со случая $m << k$. В этом случае $| A_i^a | << Y$, так что в качестве нулевого приближения можно воспользоваться решением для теории чисто скалярного поля [1, 2]

$$\tilde{Y}^{(o)} = \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^{1/2} u, \tag{6a}$$

где u — постоянный изоспинор ($u^+ u = 1$). При этом уравнение для A_i^a можно линеаризовать. Так же как в работе [4], в первом приближении мы имеем для A_i^a решение в виде суперпозиции первых гармоник на сфере:

$$\tilde{A}_i^b = \frac{a}{g} \eta_{ik}^b z_k, \qquad a \sim m/k << 1. \tag{6б}$$

Постоянные матрицы η_{ik}^b в силу (5) и условия разрешимости уравнений для нахождения следующих приближений по a удовлетворяют соотношениям:

$$\eta_{ik}^a = -\eta_{ki}^a ; \quad [\eta^a, \eta^b] = C_1 \epsilon_{abc} \eta^c, \quad (\eta^a)^2 \eta^b = C_2 \eta^b ,$$

$$\eta^a Tr(\eta^a \eta^b) = C_3 \eta^b ,$$

где C_1, $C_2 C_3$ — произвольные константы. Имеется 6 типов таких матриц; они могут быть выбраны в виде

$$\text{I.}\quad \eta^a_{ik} = 2\epsilon_{abc}\,(\gamma_i)^{bd}(\gamma_k)^{cd} \qquad\qquad \text{IV.}\quad \eta^1_{ik} = R_{ik},\quad \eta^2_{ik} = S_{ik}$$

$$\text{II.}\quad \eta^a_{ik} = \epsilon_{aik} \qquad\qquad \text{V.}\quad \eta^1_{ik} = R_{ik} + S_{ik}$$

$$\text{III.}\quad \eta^a_{ik} = \tfrac{1}{2}(\epsilon_{4ika} + \delta_{4i}\,\delta_{ka} - \delta_{4k}\delta_{ia}) \qquad\qquad \text{VI.}\quad \eta^1_{ik} = R_{ik} \tag{8}$$

$$R_{ik} = \delta_{i1}\delta_{k2} - \delta_{k1}\delta_{i2}, \qquad S_{ik} = \delta_{i3}\delta_{k4} - \delta_{k3}\delta_{i4}\,.$$

Элементы матриц η^a_{ik}, не указанные в формулах (8), равны нулю. Пять симметричных бесшпуровых 3×3 матриц γ^{ab}_i удовлетворяют соотношениям $Tr\gamma_i\,\gamma_k = \delta_{ik}$. Первые три набора метриц $i\eta^a_{ik}$ в формулах (8) реализуют антисимметричные представления генераторов группы $SU(2)$ с моментами $T = 2$, 1 и $(\tfrac{1}{2}\oplus\tfrac{1}{2}^*)$[1]. В случае III представление приводимо и дается матрицами Хоофта [9].

Последующие итерации уравнений (3) в каждом из шести случаев дает однозначно форму решений при произвольных m/k. В случаях II, III, V, VI мы имеем

$$A^a_i = \frac{1}{g}\,\eta^a_{ik} z_k a(S); \quad Y = \frac{u}{g}\,\phi(S); \quad S \equiv \eta^a_{ik}\,\eta^a_{ie} z_k z_e\,. \tag{9}$$

В случае IV получается решение, зависящее от двух переменных :

$$A^1_i = \frac{1}{g}\,\eta^1_{ik} z_k a_1(S_1, S_2); \qquad A^2_i = \frac{1}{g}\,\eta^2_{ik} z_k a_2(S_1, S_2); \qquad A^3_i = 0\,;$$

$$Y = \frac{u}{g}\,\phi(S_1, S_2); \qquad S_{1,2} \equiv \eta^{1,2}_{ik}\,\eta^{1,2}_{ie} z_k z_e\,. \tag{10}$$

Наконец, для случая I решение имеет вид

$$A^a_i = \frac{1}{g}\,\epsilon_{abc}\,[a_1(S)\hat{z}\gamma_i + a_2(S)\hat{z}^2\gamma_i + a_3(S)\hat{z}^2\gamma_i\,\hat{z}]_{cb}\,; \tag{11}$$

$$Y = \frac{u}{g}\,\phi(S); \quad \hat{z} \equiv z_i\,\gamma_i\,; \quad S \equiv \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,\hat{z}^3.$$

Для функций $a_i(S)$, $\phi(S)$ можно во всех случаях написать систему уравнений в замкнутой форме.

---

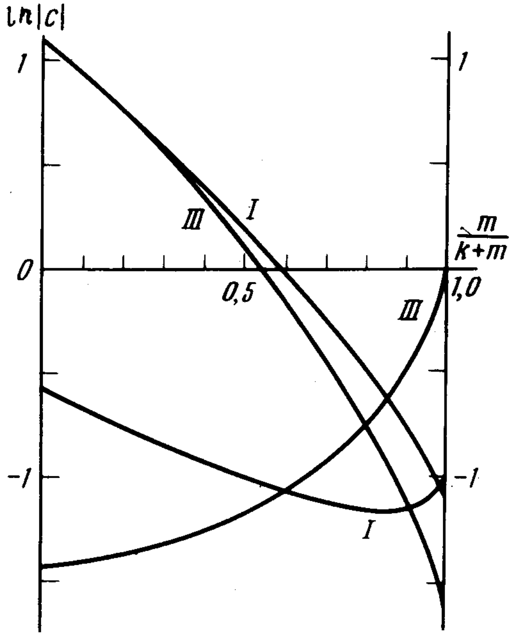
[1] Заметим, что при $\lambda/g^2 \to \infty$ в уравнениях для III случая существуют другие решения практически с тем же действием, которые отличаются от (12) в основном формой решения для скалярного поля ϕ.

Для случая III удается найти точное решение, которое переходит в (6а), (6б) в пределе $m/k << 1$[1]. Мы напишем это решение в четырехмерной форме

$$A_\mu^a = \frac{4}{g}\, \eta^a_{\mu\nu} x_\nu \frac{\rho^4 - 1}{(\rho^2 + x^2)(1 + \rho^2 x^2)} ; \qquad \phi = \frac{4i\sqrt{3}}{g} \times$$

$$\times\; u[(\rho^2 + x^2)(1 + \rho^2 x^2)]^{-1/2} ; \qquad \rho^4 = \frac{12\lambda}{g^2} - 1 . \tag{12}$$

Как видно из формулы (12), A_μ^a с точностью до множителя совпадает с функцией, которая является произведением решений, отвечающих инстантонам [9] с масштабами ρ и $1/\rho$.



Перевальные значения $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{g}$ определяются из условия стационарности функционала (3) при вариации его по λ и g. При этом оказывается, что при каждом фиксированном значении m и k имеется два различных набора значений $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{g}$. Коэффициенты разложения (2) при больших k и m с точностью до предэкспоненты даются формулой (1)

$$G_n^{(k,m)} \quad \mathrm{Re}\, e^{-J(\tilde{A}, \tilde{\phi}, \tilde{g}, \tilde{\lambda})} \equiv \mathrm{Re}\left(\frac{k+m}{16\pi^2 e}\right)^{k+m} \left[C\left(\frac{m}{k+m}\right)\right]^{k+m} . \tag{13}$$

Поэтому нам следует выбрать из всех решений такое, для которого $\mathrm{Re}\, J$ минимальна, т. е. $|C|$ максимально.

Итерационное решение уравнений для функций a_i, ϕ в формулах (9) – (11) позволяет найти $\left| C\left(\frac{m}{k+m}\right)\right|$ в пределе малых m/k:

$$\ln |C| = \ln 3 - \frac{m}{k+m} \ln 6 - B\left(\frac{m}{k+m}\right)^2 - \ldots, \qquad (14)$$

где коэффициент B для случаев I – VI равен, соответственно, $B = (1/9, 10/63, 5/18, 5/42, 5/21, 5/28)$. Таким образом, максимальный перевал в функциональном интеграле при малых m/k дается I решением. Решения уравнений для случаев I, II, IV, так же как и для случая III, содержат неоднозначность при нахождении $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{g}$ через m и k.

Как правило, более выгодным с точки зрения величины перевала в пределе $m/k \to \infty$ оказывается ветвь с $\tilde{\phi} \to 0$, т. е. в этом пределе мы переходим к случаю теории чистого янг-миллсовского поля. Мы нашли экстремум для всех 6 форм решений (9), (10), (11) путем использования в качестве пробных функций низших сферических гармоник на 5-мерной сфере. На рисунке изображены кривые для решений I и III, которые дают максимальное значение $\ln |C|$ в формуле (13). Как видно, в пределе $m/k \to 0$ наиболее выгодно решение I, в то время как при $m/k \to \infty$ максимальный вклад дает инстантон-антиинстантонная конфигурация, использованная в работе [5]. Мнимая часть $\ln C$ определяет период осцилляций $G_n^{(k,m)}$. Оказывается, что при $m/k \ll 1$ ряд (2) знакопеременный как по g^2, так и по λ, в то время как при $m/k \gg 1$ ряд (2) знакопостоянный по g^2 и знакопеременный по λ. Предэкспонента в формуле (13) определяется, как обычно, числом хвостов n и числом нулевых мод, возникающих в результате нарушения симметрии на решениях (9) – (11).

Таким образом, в данной работе найдены все возможные формы решений (9) – (11) классических уравнений для модели, описываемой лагранжианом (1), на классе которых в достаточно малом интервале значений параметра m/k реализуется максимально высокий перевал в функциональном интеграле для $G_n^{(k,m)}$. При увеличении m/k мы не можем гарантировать, что решение, отвечающее максимально высокому перевалу, находится среди решений формы (9) – (11). Интересно, что решение III, наиболее выгодное при $m/k \to \infty$, по характеру совпадает с разрывным решением, использованным в работе [5] для чистого янг–миллсовского поля, но в отличие от него является непрерывным.

Авторы благодарны А.А.Белавину за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 марта 1978 г.

Литература

[1] Л.Н.Липатов. ЖЭТФ, 72, 411, 1977.

[2] E.Brezin, J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin. Phys. Rev., D15, 1544, 1977.

[3] C.Itzykson, G.Parisi, J.B.Zuber. Phys. Rev. Lett., **38**, 306, 1977.

[4] А.П.Бухвостов, Л.Н.Липатов. Phys. Lett., **70B**, 48, 1977; ЖЭТФ, 73, 1658, 1977.

[5] E.B.Bogomolny. V.Fateyev. Phys. Lett., (в печати).

[6] G.Parisi. Phys. Lett., **66B**, 382, 1977; E.B.Bogomolny. V.Fateyev. Phys. Lett., (в печати).

[7] G.Talenti. Ann. Math. Pura Appl., **110**, 353, 1976.

[8] R.Jackiw, C.Rebbi. Phys. Rev., **D14**, 517, 1976.

[9] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz, Yu. S.Tyupkin. Phys. Lett., **59B**, 85, 1975; G.t'Hooft. Phys. Rev., **D14**, 3432, 1976.