Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 11, стр. 644 – 648 *5 июня 1978 г.*

НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО ОДНОМЕРНОГО ФЕРМИ-ГАЗА

В.Я.Кривнов, А.А.Овчинников

Предложен регулярный метод получения энергии основного состояния спектра и корреляционных функций слабонеидеального одномерного ферми-газа.

Несмотря на то, что имеется ряд точных результатов в задаче о неидеальном одномерном ферми- газе [1 – 3], эта задача все же далека от полного решения. В частности, если потенциал взаимодействия даже и мал, но не δ-образен, не существует регулярного метода для вычисления энергии, спектра и корреляционных функций в зависимости от константы взаимодействия. Методы суммирования "паркетных диаграмм" и ренорм-группы позволяют получить лишь ведущий член в соответствующих величинах [4, 5]. С другой стороны, сведение реального спектра к линейному по импульсу [6 – 8] не является строгим и, (во всяком случае), регулярным для вычисления соответствующих поправок. Целью нашего сообщения является разработка регулярного метода получения поправок для энергии, спектра и корреляционных функций слабонеидеального ферми-газа.

Здесь мы рассмотрим задачу о бесспиновом ферми-газе, оставляя спиновый случай для более подробной публикации.

Будем искать волновую функцию $\Psi(x_1,\ldots x_N)$ системы бесспиновых ферми-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i>j}^{N} v(x_i - x_j); \quad (\hbar = 2m = 1) \tag{1}$$

в виде

$$\Psi(x_1,\ldots x_N) = \Psi_0(x_1,\ldots x_N)\,\phi(x_1,\ldots x_N), \tag{2}$$

где $\phi(x_1,\ldots x_N)$ – симметричная функция, а $\Psi_0(x_1,\ldots x_N)$ – волновая функция основного состояния (1) при $V(x) = 0$, которая с точностью до нормировки равна (N – нечетное):

$$\Psi_0(x_1,\ldots x_N) = \prod_{i>k} \sin\frac{\pi}{L}(x_i - x_k) \quad (L \text{ – длина системы}), \tag{3}$$

Подставляя (2) в уравнение $\hat{H}\Psi = E\Psi$ придем к уравнению

$$\tilde{H}\phi = (E - E_0)\phi, \tag{4}$$

где E_0 — энергия основного состояния (1) при $V(x) = 0$, а $\tilde{H}$ имеет вид

$$\tilde{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - 2\frac{\pi}{L}\sum_{i>j} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{L}(x_i - x_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i>j} V(x_i - x_j); \tag{5}$$

Ввиду того, что $\phi(x_1,\dots x_N)$ — симметричная функция, задача о нахождении волновой функции системы ферми-частиц сводится согласно (4) к соответствующей задаче для системы бозонов с гамильтонианом (5).

Для решения (4) воспользуемся известным в теории слабонеидеального бозе-газа регулярным методом построения волновых функций основного и слабовозбужденных состояний, предложенным Боголюбовым и Зубаревым [9]. Применимость этого метода к одномерной задаче исследовалась в работе Попова [10]. В соответствии с [9] в ведущем по $V(x)$ приближении $\phi(x_1,\dots x_N)$ для основного состояния имеет вид

$$\phi(x_1,\dots x_N) = \exp\left\{\sum_{ij}^{N} S(x_i - x_j)\right\} \tag{6}$$

причем

$$\sigma(k) = \pi(k^2 + 2p_F|k| - \sqrt{(k^2 + 2p_F|k|)^2 + 2\pi^{-1}p_F k^2\nu(k)})/4p_F k^2;$$
$$\sigma(0) = 0, \tag{7}$$

где $\sigma(k)$ и $\nu(k)$ — фурье-образы $S(x)$ и $V(x)$ соответственно, p_F — импульс Ферми исходной системы фермионов. Для энергии основного состояния $E_{осн}$ и спектра элементарных возбуждений $\epsilon(k)$, имеющих бозевский характер, получим

$$E_{осн} - E_0 = (2\pi)^{-1}p_F[N\nu(0) - \sum_{k=0}\nu(k) - 4\sum_k k^2\sigma(k)],$$
$$\epsilon(k) = [(k^2 + 2p_F|k|)^2 + 2p_F\pi^{-1}k^2\nu(k)]^{1/2}. \tag{8}$$

Если пренебречь членом k^2 в комбинации $k^2 + 2p_F|k|$, то (8) совпадут с соответствующими выражениями полученными Либом и Маттисом в [7]. Отметим, однако, что полученные нами результаты справедливы лишь при $\nu(k)/p_F \ll 1$. При этом, в частности, $\sigma(k)$ принимает вид

$$\sigma(k) = -\nu(k)/4(k^2 + 2p_F|k|). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении корреляционной функции $g(x,x') = \langle\Psi|a^+(x)a(x')|\Psi\rangle$ в основном состоянии (1) ($a^+(x)$, $a(x)$ — операторы рождения и уничтожения ферми-частиц). Можно показать, что она имеет вид

$$g(x, x') = \langle e^{T_0} a^+(x) a(x') e^{T_0} \rangle_0 / \langle e^{2T_0} \rangle_0 , \qquad (10)$$

где $\langle \ldots \rangle_0$ – означает усреднение с волновой функцией (3), а

$$\hat{T}_0 = \int_0^L dz \int_0^L dz' S(z - z') n(z) n(z'); \qquad n(z) = a^+(z) a(z). \qquad (10)$$

удобно преобразовать к виду

$$g(x, x') = \exp\{2S(0) - 2S(\zeta)\} \langle e^{2(T_0 + T_1)} a^+(x) a(x') \rangle_0 / \langle e^{2T_0} \rangle_0 , \quad (11)$$

где $\hat{T}_1 = \int_0^L [S(z - x') - S(z - x)] n(z) dz; \quad \zeta = x' - x$ и при переходе от (10) к (11) мы воспользовались коммутируемостью $\hat{T}_0$ и $\hat{T}_1$. Вычисление (11) будем производить диаграммным методом. Выражая средние в (11) через вклады лишь связанных диаграмм, придем к соотношению (в дальнейшем использовано импульсное представление):

$$\langle e^{2(T_0 + T_1)} a^+(x) a(x') \rangle_{0\,\text{св}} \Big/ e^{\sum_{n=1} \frac{2^n}{n!} \langle (T_0 + T_1)^n \rangle_{0\,\text{св}}} =$$

$$= g_0(\zeta) + \frac{1}{L} \sum_{p,q,n=1} e^{-ip\zeta + iqx} \frac{2^n}{n!} \langle (T_0 + T_1)^n a^+_{p+q} a_p \rangle_{0\,\text{св}} \qquad (12)$$

$g_0(\zeta) = (\pi\zeta)^{-1} \sin p_F \zeta$ – корреляционная функция основного состояния (1) при $V(x) = 0$. Диаграммы, соответствующие (12) состоят из замкнутых петель, соединенных линиями взаимодействия T_0. При этом в каждой петле произведено суммирование по всем частичным и дырочным линиям и в соответствии с (12) возможно два типа петель, графически изображенных на рис. 1. Вклад петли, к которой присоединено n-линий взаимодействия T_0 равен

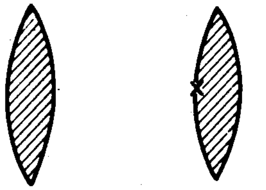
$$\sum_{k=0} \frac{1}{k!} Q_{n+k,\alpha}(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_k) \tilde{\sigma}(p_1) \ldots \tilde{\sigma}(p_k) , \qquad (13)$$

где $\alpha = 1, 2$ соответствуют рис. 1,*а* и *б*, $\tilde{\sigma}(q) = \sigma(q)(\exp(iq\zeta) - 1)$

$$Q_{m,1}(q_1, \ldots q_m) = \sum_{p_1, \ldots p_m} \langle a^+_{p_1 + q_1} a_{p_1} \ldots a^+_{p_m + q_m} a_{p_m} \rangle_{0\,\text{св}} \delta_{q_1 + \ldots + q_m, 0} , \qquad (14)$$

$$Q_{m,2}(q_1,\dots q_m) = \sum_{p,q,p_1\dots p_m} e^{-ip\zeta} \langle a^+_{p_1+q_1} a_{p_1} \dots a^+_{p_m+q_m} a_{p_m} a^+_{p+q} a_p \rangle_{0\,\text{св}} \delta_{q_1+\dots+q_m,-q}.$$

Члены с $k \neq 0$ в (13) соответствуют "вкраплениям" в петли произвольного количества операторов T_1. Приведем без доказательства следующие утверждения, касающиеся свойств $g(x, x') = g(\zeta)$ и функций $Q_{n,a}(q_1,\dots q_n)$.



а *б*

Рис. 1. Графическое изображение петель

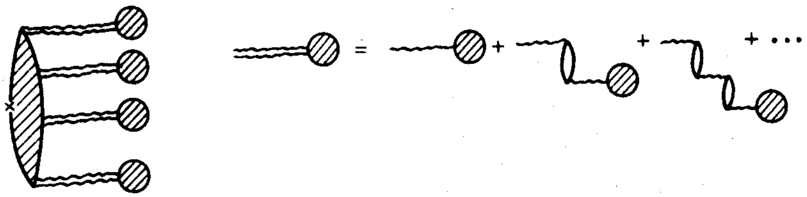


Рис. 2. Диаграммы, дающие ненулевой вклад в (12)

I. При вычислении $g(\zeta)$ для $\zeta \to \infty$ существенны лишь диаграммные вклады при $q_1,\dots q_n \to 0$, т. е. поведение $g(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$ определяется видом функций $Q_{n,a}(q_1,\dots q_n)$ при малых значениях q (более точно, при $|q_1|,\dots |q_n| < 2p_F$;

$$|q_1+q_2|,\dots |q_{n-1}+q_n| < 2p_F;\ |q_1+q_2+q_3| < 2p_F;\dots |q_1+\dots+q_n| < 2p_F).$$

Этот факт связан с расходимостью $\sigma(q)$ при $q \to 0$.

II. При малых q (в смысле указанном в I) $Q_{n,1}(q_1,\dots q_n) = \begin{cases} |q_1|, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}$

$$Q_{n,2}(q_1,\dots q_n) = (i\zeta)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-iq_i\zeta}) [e^{ip_F\zeta} \prod_{i=1}^{n} \theta(q_i) - e^{-ip_F\zeta} \prod_{i=1}^{n} \theta(-q_i)];$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

С учетом II ряд (12) может быть просуммирован точно: единственными диаграммами, дающими ненулевой вклад, являются диаграммы вида. Суммируя эти диаграммы, получим для $g(\zeta)$:

$$g(\zeta) = g_0(\zeta)\exp\{-f_0(\zeta)\}; \quad f_0(\zeta) = 2\pi^{-2}\int_0^\infty dq(1-\cos q\zeta)q\sigma^2(q)/(1-2q\pi^{-1}\sigma(q)). \tag{15}$$

Поскольку показатель экспоненты в (15) $\sim \ln p_F\zeta$ для $p_F\zeta >> 1$, функция распределения $n_p = \langle \Psi | a_p^+ a_p | \Psi \rangle$ при $p \approx p_F$ имеет вид

$$n_p = \frac{1}{2}\{1 + \mathrm{sign}(p_F - p)|p - p_F|^\beta\}; \qquad \beta = \nu^2(0)/32\pi^2 p_F^2 . \tag{16}$$

Строгий анализ (12) показывает, что $g(\zeta)$ при $p_F\zeta >> 1$ имеет вид

$$g(\zeta) = \exp\{-f_0(\zeta) + f_1(\nu,\zeta)\}\{g_0(\zeta) + \zeta^{-1}\sum_{n=2}(\nu/p_F)^n\phi_n(\zeta)\}. \tag{17}$$

где $f_1(\nu,\zeta)$ и $\phi_n(\zeta)$ – неособенные при $\zeta\to\infty$ функции. (17) не изменяет характера n_p (16).

Научно-исследовательский физико-технический институт им. Л.Я. Карпова

Поступила в редакцию 20 апреля 1978 г.

Литература

[1] M. Gandin. Phys. Lett., A24, 55, 1967.

[2] C.N.Yang. Phys. Rev. Lett., 19, 1312, 1967.

[3] В.Я.Кривнов, А.А.Овчинников. ЖЭТФ, 67, 1568, 1974.

[4] Ю.А.Бычков, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Письма в ЖЭТФ, 2, 146, 1965.

[5] N.Menyhard, J.Solyom. J.Low Temp. Phys., 12, 529, 1973.

[6] J.M.Luttinger, J.Math. Phys., 4, 1154, 1963.

[7] D.C.Mattis, E.H.Lieb. J.Math. Phys., 6, 304, 1965.

[8] И.Е.Дзялошинский, А.И.Ларкин. ЖЭТФ, 65, 410, 1973.

[9] Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев. ЖЭТФ, 28, 129, 1955.

[10] В.Н.Попов. ТМФ, 30, 346, 1977.