Письма в ЖЭТФ, том 27, вып.11, стр. 658 – 661 *5 июня 1978 г.*

СВОЙСТВА ГРАНИЦЫ МНОГОФОНОННОГО СПЕКТРА

С.В.Иорданский, Л.П.Питаевский

Исследованы свойства энергетического спектра жидкого гелия вблизи звуковой линии $\epsilon = up$. При $T = 0$ гелию можно сообщить энергию и импульс только в области, лежащей на плоскости ϵ, p выше этой линии, причем по мере приближения к ней энергия должна быть распределена среди все бо́льшего числа фононов. Вероятность этого процесса, то есть мнимая часть соответствующей гриновской функции, пропорциональна $\exp(-5n \ln n)$, где n – число рождающихся фононов.

Как известно, при не слишком высоких давлениях, энергетический спектр жидкого гелия носит "распадный" характер, т.е. имеет при малых импульсах вид [1)]

$$\epsilon = up + \gamma p^3 \qquad (1)$$

с $\gamma > 0$. Это приводит к появлению затухания фононов при абсолютном нуле температур. В своем дальнейшем ходе спектр "загибается" книзу, так что в некоторой точке $p = p^*$ кривая спектра пересекается с прямой $\epsilon = up$, имеющей наклон, равный скорости звука u при $p \to 0$. По мере приближения к точке p^* делается возможен распад лишь все на бо́льшее число фононов и в самой точке $p = p^*$ затухание обращается в нуль (1). Представляет существенный интерес выяснить закон этого обращения в нуль. Этот вопрос и решен в настоящей работе.

Сформулированная задача является частным случаем более общей. "Звуковая" линия $\epsilon = up$ в плоскости ϵ, p представляет собой нижнюю границу фононного спектра гелия – невозможно при абсолютном нуле температур сообщить гелию энергию и импульс в области ниже этой линии путем рождения какого-либо числа фононов. На этой прямой поэтому должен обращаться в нуль динамический формфактор жидкости, т.е.вероятность неупругого рассеяния нейтронов с передачей энергии и импульса ϵ и p. Мы будем решать именно эту общую задачу, вычисляя мнимую часть компоненты Фурье гриновской функции, составленной из операторов плотности жидкости $G(X) = -i \langle T\rho(X)\rho(0)\rangle$. Эта мнимая часть и есть динамический формфактор.

Вычислим минимальное число фононов, которое можно родить несколько выше звуковой линии. Заранее ясно, что выгоднее всего, чтобы импульсы фононов были почти равны по величине и направлению. Пусть n – число рождающихся фононов, а ω и $\mathbf{k}$ – энергия и импульс каждого

[1)] Мы пользуемся системой единиц с $\hbar = 1$.

из них. Тогда $\epsilon = n\omega$, $p = nk$ и из закона дисперсии (1) находим

$$\frac{\epsilon}{n} = \frac{up}{n} + \frac{\gamma p^3}{n^3}$$

так что

$$n = \frac{p^{3/2}\gamma^{1/2}}{(\delta\epsilon)^{1/2}}, \qquad \delta\epsilon = \epsilon - up . \tag{2}$$

Метод решения и характер получаемых результатов проще всего объяснить на примере возбуждения ангармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$u(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \beta x^3$$

внешним полем частотой $E >> \omega_0$. Согласно Ландау матричный элемент такого процесса можно вычислять квазиклассически, уводя контур интегрирования в комплексную плоскость (2). Имеем для матричного элемента перехода

$$M \sim \exp\{\int^{\infty}[\sqrt{2m(u-E)} - \sqrt{2mu}]dx . \tag{3}$$

При малых β в интеграле существенны значения $u >> E$, так что

$$M \sim \exp\left[-E\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{m}dx}{\sqrt{2u(x)}}\right] \equiv \exp(-E\tau),$$

где $\tau = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{m}dx}{\sqrt{2u(x)}}$ — мнимое время, необходимое для того, чтобы осциллятор дошел в запрещенной области от точки x_1 до точки x_2. При малых β можно для вычисления τ воспользоваться гармоническим приближением, обрезав интеграл снизу на таком значении x_1, что $u(x_1) \sim E$, а сверху при таком x_2, что $m\omega_0^2 x_2^2 \sim \beta x_2^3$.

В результате $|M|^2 \sim \exp\left(-\frac{E}{\omega_0}\ln\frac{m^3\omega_0^6}{\beta^2 E}\right)$.

Основная задача о границе многофононного спектра решалась исходя из записи гриновской функции в виде функционального интеграла. Гамильтониан жидкости, соответствующий закону дисперсии (1), имеет вид

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{\rho_0}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{u^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \frac{\gamma u^2}{\rho_0}(\nabla\rho')^2 + \frac{(\nabla\phi)\rho'(\nabla\phi)}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d}{d\rho_0}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\frac{\rho'^3}{6} \right\}, \tag{4}$$

где ρ' и ϕ – операторы соответственно двух канонически сопряженных величин – изменения плотности жидкости и потенциала скорости. Интересующую нас гриновскую функцию можно записать как: [3]

$$G(\epsilon, \mathbf{p}) = -i\,\frac{\int \{ e^{i(\epsilon t - \mathbf{pr})}\rho'(t,\mathbf{r})\,\rho'(0,0)\,e^{iS}\} D\rho' D\phi\, dt\, d^3x}{\int e^{iS} D\rho' D\phi}, \tag{5}$$

где интегрирование производится по значениям ρ' и ϕ в каждой точке 4-пространства t, $\mathbf{r}$, а S обозначает функционал:

$$S = \int \phi \frac{\partial\rho'}{\partial t} d^3x_1 dt_1 - \int H(\phi, \rho')\, dt_1 \tag{6}$$

Поскольку в процессе участвует большое число фононов, заранее ясно, что имеет место квазиклассическая ситуация и можно вычислять мнимую часть G методом перевала. Условие стационарности экспоненты позволяет заменить функционал S в числителе на его значение на классических траекториях, т.е. на классическое действие и вынести из-под знака функционального интегрирования. При этом траектории на участках $-\infty < t_1 < 0$ и $t < t_1 < \infty$ должны иметь суммарную энергию и импульс, равные нулю, поскольку ρ' и ϕ должны убывать при $t \to \pm\infty$, а на участке $0 < t_1 < t$ – равные соответственно ϵ и $\mathbf{p}$. Условие непрерывности ρ' и ϕ при $t_1 = 0, t$ может выполняться тогда только для траекторий в классически запрещенной области. Это означает, что при вычислении действия нужно перейти к мнимому времени, причем как и в случае осциллятора, наиболее существенна та часть траектории, где кубичные члены в гамильтониане еще малы по сравнению с квадратичными. Это позволяет представить мнимую часть гриновской функции в виде

$$\operatorname{Im} G \sim \exp(-2\epsilon\tau), \tag{7}$$

где τ – "мнимое время", необходимое для того, чтобы пакет фононов с частотами около ω и суммарной энергией ϵ и импульсом $\mathbf{p}$ приобрел плотность, сравнимую с невозмущенной плотностью ρ_0. Форму пакета нужно выбрать таким образом, чтобы время τ оказалось минимальным. Поскольку нарастание компонент Фурье плотности происходит по закону $\rho_k \sim e^{uk\tau}$, то по порядку величины $\rho(\mathbf{r}) \sim \rho_0 \Delta_{\parallel}^{1/2} \Delta_{\perp} e^{uk\tau}$, где $\Delta_{\parallel}$ и $\Delta_{\perp}$ – соответственно ширины пакета в k-пространстве в направлениях вдоль и поперек p. Выгоднее всего выбрать $\Delta_{\parallel} \sim (\delta\epsilon)^{1/2}$ и $\Delta_{\perp} \sim \delta\epsilon$. В результате

$$\tau \approx \frac{5}{2\omega} \ln\left(\frac{\gamma}{\delta\epsilon}\right)^{1/2} \tag{8}$$

и вероятность рождения фононов, т.е. мнимая часть гриновской функции, имеет вид

$$\operatorname{Im} G \sim \exp(-5n\ln n), \tag{9}$$

где n – минимальное число рождающихся фононов, даваемое формулой (2). Формула (9) имеет логарифмическую точность в показателе, т.е. численный коэффициент под логарифмом неопределен.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 апреля 1978 г.

Литература

[1] Л.П.Питаевский, И.Б.Левинсон. Phys. Rev., B14, 263, 1976.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. § 52, М., изд. Наука, 1974.

[3] В.Н.Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат. 1976.