Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 3, стр. 178 – 181 5 августа 1975 г.

О СОЛИТОНОПОДОБНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ХИГГСА

А.Е.Кудрявцев

В двухмерной классической теории скалярного поля, описываемой уравнением Ландау – Гинзбурга, изучается взаимодействие двух солитонов. Показано, что образуется новое решение (двойной солитон) – самолокализованное, медленно осциллирующее и слабозатухающее решение.

Обычно стабильность солитона в релятивистской теории объясняют тем, что солитонное решение топологически отличается от вакуумного. В частности для уравнения движения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \qquad (1)$$

имеется солитонное решение

$$\phi(x, t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \frac{m(x - vt)}{\sqrt{2(1 - v^2)}} . \qquad (2)$$

Это решение имеет различные граничные условия на бесконечностях по x и поэтому не может перейти в малые колебания вокруг одного из вакуумных значений $\phi_{\pm} = \pm\sqrt{m^2/\lambda}$. Существование стабильного двойного солитона для sine-Gordon уравнения обычно объясняется случайной причиной – полной интегрируемостью этого уравнения.

Исследуем вопрос о взаимодействии двух солитонных решений типа (2). В качестве начального условия была взята функция

$$\phi_0(x, 0) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\left(\operatorname{th}\frac{m(x + x_0)}{\sqrt{2(1-v^2)}} + \operatorname{th}\frac{m(-x + x_0)}{\sqrt{2(1 - v^2)}} - 1\right) . \qquad (3)$$

Она изображена на рис. 1 (кривая 1). Граничные условия для этой функции совпадают с вакуумным значением $\phi_- = -\sqrt{m^2/\lambda}$. Поэтому можно было надеяться, что при столкновении солитонов произойдет "аннигиляция", т. е. что наше решение перейдет в большое число малых колебаний относительно величины ϕ_-. Начальная скорость сближения солитонов была взята равной 0,1 (скорость света $c = 1$).

На рис. 1 изображено последовательное развитие во времени решения уравнения (1) с начальным условием (3) (численный счет). Видно, что характер движения другой: после сближения стенок в окрестности точки $x = 0$ происходят большие колебания явно нелинейного происхождения. На рис. 2 представлена зависимость от времени поля ϕ в точке $x = 0$.

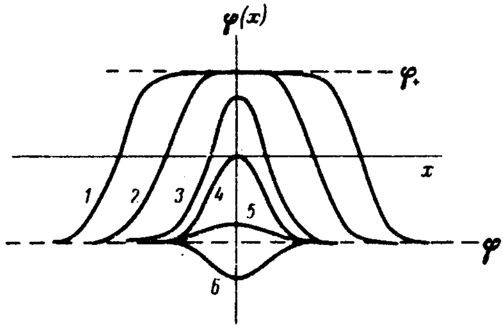

Рис. 1. Зависимость решения от времени. Цифрами отмечены последовательные по времени решения $\phi(x, t_i)$ по график 6 включительно, далее опять повторяются графики 5, 4, 3, 4, 5, 6 и т. д.

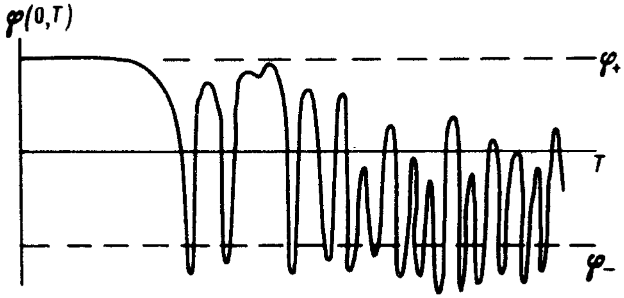

Рис. 2. Зависимость колебания поля ϕ в точке $x = 0$ от времени

Объяснить наблюдаемое явление слипания двух солитонов можно следующим образом. Сделаем предположение, что точное решение в произвольный момент времени представляется в виде $\phi(x, t) = \phi_0(x, t) + f(x, t)$, причем $f(x, t) << \phi_0(x, t)$, а $\phi_0(x, t)$ – суперпозиция двух солитонов и вакуума ϕ_-. В линейном приближении уравнение для функции f имеет следующий вид

$$f_{tt} - f_{xx} - m^2 f + 3\lambda\phi_0^2 f = Q(x, t), \tag{4}$$

где $Q(x, t)$ – источник поля, f – зависит лишь от функции $\phi_0(x, t)$. Величина $Q(x, t)$ максимальна при $x = 0$, и выражение для нее в этой точке имеет простой вид

$$Q(0, t) = -6m^2\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\,y(1 - y)^2, \tag{5}$$

где $y = \operatorname{th}\dfrac{(x_0 - vt)m}{\sqrt{2(1 - v^2)}}$. Излучение исчезает, когда расстояние между солитонами велико ($y \approx 1$), а также, когда оно равно нулю ($y = 0$) – такое расположение солитонов эквивалентно точному вакуумному решению ϕ_-. Величина $Q(0, t)$ растет при сближении солитонов, поэтому и амплитуда волн f растет со временем. Это наблюдается в численном решении (эти колебания малы и поэтому не изображены на рис. 1).

Рассмотрим теперь поведение приближенного решения $\phi_0(x, t)$. В пренебрежении излучением гамильтониан $H(\phi_0) = T(\phi_0) + V(\phi_0)$ должен сохраняться, и условие его сохранения определяет нам уравнение движения двух солитонов относительно друг друга. Поведение потенциальной энергии $V(\tilde{x}_0) = \frac{1}{2}\int\left\{\phi_{0x}^2 - m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^4\right\}dx$ как функции расстояния между солитонами x_0 изображено на рис. 3. Качественно понять поведение $V(\tilde{x}_0)$ можно, располагая решение $\phi_0(\tilde{x}_0)$ в рельефе потенциальной энергии поля. При больших расстояниях $\tilde{x}_0$ потенциальная энергия постоянна и равна сумме масс двух солитонов, т. е. $(4\sqrt{2}/3)(m^3/\lambda)$. При полном сближении солитонов энергия становится равной нулю, так как совпадает с энергией вакуума. При отрицательных $\tilde{x}_0$ функция $V(\tilde{x}_0)$ растет линейно с ростом $|\tilde{x}_0|$, так как часть решения становится равной $-3\sqrt{m^2/\lambda}$. Для такого значения поля потенциальная энергия больше вакуумной[1)].

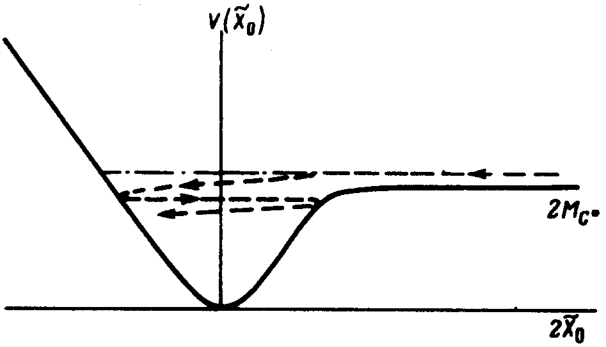

Рис. 3. Потенциальная энергия двух солитонов, находящихся на расстоянии $\tilde{x}_0$ друг от друга. Пунктиром обозначена траектория "захвата" солитона

Из рис. 3 становится ясно, что может осуществляться два различных вида движения солитонов — инфинитное для энергий, больших суммы двух масс солитонов и финитное движение в яме для меньших энергий.

Учет излучения меняет картину. Теперь энергия $H(\phi_0)$ не сохраняется, а медленно убывает. Поэтому при сближении солитонов происходит процесс "захвата" и характер движения меняется с инфинитного на финитный.

Период колебаний, изображенных на рис. 2, равен периоду движения в яме и имеет порядок m^{-1}. Так как колебательное движение солитонов в яме происходит вокруг точки $\tilde{x}_0 = 0$, в которой излучение строго равно нулю, то это приводит к сильному подавлению излучения. Таким образом двойной солитон является квазистабильным объектом.

[1)] Рост потенциальной энергии при отрицательных $\tilde{x}_0$ является причиной отталкивания солитонов в данной модели. Этот факт был впервые замечен Н.А.Вороновым.

При увеличении начальной энергии солитонов процесс захвата перестает наблюдаться – солитоны отталкиваются, потеряв часть энергии на излучение.

Рассмотрение взаимодействия бо́льшего числа солитонов в такой потенциальной схеме не приводит к появлению новых многосолитонных связанных состояний.

Ясно, что квантование движения солитонов по аналогии с квантованием, проведенным в работе [1], приведет к дискретному спектру тяжелых резонансов с массами от 0 до $2M_c$. Это будут узкие резонансы, которые могут распадаться друг в друга с испусканием легких стабильных бозонов с массой $\sqrt{2}\,m$.

Найденное новое решение может оказаться полезным для построения теории Ψ-бозонов на основе когерентных состояний поля, что было предложено недавно И.С.Шапиро [2].

Я очень благодарен Н.И.Борисовой, проведшей большое число численных расчетов, которые привели к столь интересному результату и побудили меня провести качественное исследование ответов. Я также очень благодарен Н.А.Воронову за последовательные обсуждения всех результатов работы и особенно И.С.Шапиро за беседы, которые оказались столь плодотворными при уяснении физики явления. Благодарю всех участников семинара ИТЭФ за обсуждения.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
21 июня 1975 г.

Литература

[1] В.Е.Коренин, П.П.Кулиш, Л.Д.Феддеев. Письма в ЖЭТФ, 21, 302, 1975.

[2] И.С.Шапиро. Письма в ЖЭТФ, 21, 624, 1975.