Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 3, стр. 192 – 194. *5 августа 1975 г.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ю.С. Тюпкин, В.А. Фатеев, А.С. Шварц

Устанавливается существование необычных ("топологически нетривиальных") частиц в двумерных моделях в ситуации, когда в соответствующей классической задаче нет солитонов (в частности, для взаимодействий $\lambda\phi^4$ и $g\bar{\psi}\psi\phi$ при больших λ и малых g)

В последнее время было выяснено, что частицеподобным решениям классических уравнений можно сопоставить частицы соответствующей квантовой задачи[1 – 3]. В некоторых случаях топологические соображения позволяют установить, что фазовое пространство классической задачи несвязно; этот факт используется для доказательства существования частицеподобных решений и отвечающих им квантовых частиц (см., например, [4]. Если частицеподобное решение принадлежит не той компоненте фазового пространства, в которой лежит классический вакуум (состояние с наименьшей энергией), это решение естественно назвать топологически нетривиальным. Соответствующую квантовую частицу также назовем топологически нетривиальной; простые соображения показывают, что топологически нетривиальные частицы стабильны. В настоящей статье мы покажем, что топологические соображения могут быть использованы для доказательства существования необычных ("топологически нетривиальных") частиц также в случае, когда частицеподобных решений не существует.

Рассмотрим, прежде всего, двумерную модель, описываемую гамильтонианом $H = H_0 + :\lambda\int P(\phi(x))\,dx:$, где H_0 – гамильтониан свободного скалярного поля с массой m, $P(\phi)$ – четный полином. Если минимум полинома $Q(\phi) = (m^2\phi^2/2) + \lambda P(\phi)$ достигается не в нулевой точке, то уже в классической теории мы сталкиваемся с нарушением симметрии $\phi \to -\phi$; это положение сохраняется и в квантовой задаче. У классических уравнений движения в этом случае существуют солитонные решения, обладающие конечной энергией; при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ эти решения выходят на различные классические вакуумы ϕ_+ и ϕ_- (под классическим вакуумом мы понимаем число $\phi_\pm$, в котором достигается минимум полинома $Q(\phi)$). Рассмотрим квантовую частицу, отвечающую солитону (экстремону по терминологии [2]). Пусть $\psi = \psi(f)$ – вектор состояния этой частицы с волновой функцией f. Легко видеть, что для любого локального (или квазилокального) оператора

$$\lim_{x \to \pm\infty} \langle A e^{iPx}\Psi,\ e^{iPx}\Psi\rangle = \langle A\Phi_\pm,\ \Phi_\pm\rangle, \tag{1}$$

где $\Phi_+ (\Phi_-)$ – основные состояния квантовой задачи (физические вакуумы), соответствующие классическим вакуумам $\phi_+ (\phi_-)$. (Если в теории имеется более двух классических вакуумов, то квантовые поправки к энергии вакуумов, не связанных между собой преобразованием симметрии $\phi \to -\phi$, вообще говоря, различны. Это означает, что не всякому классическому вакууму отвечает физический вакуум; поэтому из соотношения (1) вытекает, в частности, что не всякому солитону отвечает квантовая частица).

Обратимся теперь к ситуации, когда в теории, описываемой рассмотренным выше гамильтонианом H, симметрия $\phi \to -\phi$ нарушена, но это нарушение не обязательно связано с нарушением симметрии в соответствующей классической теории. (Известно, например, что нарушение этой симметрии имеет место в случае сильной связи, т. е. в случае, когда λ достаточно велико [5]). Это означает, что в теории есть два физических вакуума Φ_+ и Φ_-, переходящих друг в друга при симметрии $\phi \to -\phi$ (ради определенности считаем, что других физических вакуумов нет). Мы покажем, что в рассматриваемом нами случае существуют состояния, обладающие конечной энергией и удовлетворяющие условию (1) (энергию, как всегда, отсчитываем от энергии основного состояния). Такие состояния естественно назвать топологически нетривиальными. (Под состоянием здесь, строго говоря, нужно понимать положительный функционал на алгебре наблюдаемых. Можно использовать например, формализм L-функционалов, предложенный в [6]; тогда состояние, описываемое L-функционалом $L(a^*, a)$ следует называть топологически нетривиальным, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} L(a_x^*, a_x) = L_\pm(a^*, a)$, где a_x – функция, получающаяся из функции a сдвигом на x, L_+ и L_- – функционалы, построенные на различных основных состояниях). Из утверждения о существовании топологически нетривиальных состояний можно получить утверждение о существовании топологически нетривиальных частиц (во всяком случае, если, как обычно считают, in – состояния образуют полную систему, то топологически нетривиальные частицы существуют, поскольку топологически нетривиальное состояние не может быть сконструировано из топологически тривиальных частиц).

Для того, чтобы доказать существование топологически нетривиального состояния рассмотрим каноническое преобразование σ, определяемое формулой $\tilde{a}(x) = e^{i\beta(x)} a(x)$, $\tilde{a}^+(x) = e^{-i\beta(x)} a^+(x)$, где $\beta(x)$ – действительная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при достаточно больших положительных x и равная π при достаточно больших по модулю отрицательных x (здесь $a(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int e^{-ikx} \times a(k)\,dk$, $a^+(k)$, $a(k)$ – операторы рождения и уничтожения голых частиц). Состояние Ψ, которое получается из физического вакуума Φ_+ с помощью канонического преобразования σ топологически нетривиально. В самом деле, условие (1) проверяется без труда; нужно только убедиться в том, что энергия $\mathcal{E}(\psi)$ состояния Ψ конечна. Легко видеть, что $\mathcal{E}(\Psi) = \langle \Phi_+ | \tilde{H} - H | \Phi_+ \rangle$, где $\tilde{H}$ – гамильтониан, получающийся из H с помощью канонического преобразования σ. Пользуясь этим можно выразить $\mathcal{E}(\Psi)$ через функции $\lambda_{m,n}$, получающиеся из усеченных вакуумных средних $\langle \Phi_+ | a^+(k_1) \ldots a^*(k_m)\, a(p_1) \ldots a(p_n) | \times \Phi_+ \rangle^T$ выделением δ-функций $\delta(k_1 + \ldots + k_m - p_1 - \ldots - p_n)$. Функции $\nu_{m,n}$ являются гладкими функциями от импульсов; ультрафиолетовую асимптотику этих функций можно исследовать по теории возмущений, учитывая, что в рассматриваемых моделях при больших значениях импульсов эффективная константа связи мала. Эти соображения позволяют установить с помощью несложных, но громоздких вычислений, что $\mathcal{E}(\Psi) < \infty$.

Коснемся в заключение модели, описывающей безмассовые фермионы и массивные бозоны с гамильтонианом взаимодействия $g \int \bar{\psi} \psi . \phi \, dx$. И.В.Тютин и Е.С.Фрадкин показали, что в ней при достаточно малых g происходит спонтанное нарушение симметрии $\phi \to -\phi$, $\psi \to \gamma_5 \psi$, в результате которого фермионы приобретают массу. В рамках использованного ими приближения удается доказать, что в этой модели также существуют топологически нетривиальные частицы.

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
30 июня 1975 г.

Литература

[1] Л.Д.Фаддеев. Письма в ЖЭТФ, 21, 141, 1975.

[2] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974.

[3] Ю.С. Тюпкин, В.А.Фатеев, А.С.Шварц. ДАН СССР. 221, 70, 1975.

[4] Ю.С.Тюпкин, В.А.Фатеев, А.С.Шварц. Письма в ЖЭТФ, 21, 91, 1975.

[5] Р.Л.Добрушин, Р.А.Минлос. Функц. анализ, 7, 81, 1973.

[6] А.С.Шварц. ДАН СССР 173, 793, 1967.