Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 7, стр. 364 – 367 *5 октября 1975 г.*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОЛИТОНОВ

В.Е.Захаров

Методом обратной задачи рассеяния точно решена проблема неустойчивости солитонов в средах с дисперсией относительно поперечных возмущений. Найдены решения, описывающие нелинейную стадию неустойчивости и (в устойчивом случае) – нелинейные колебания солитона.

1. Вопрос об устойчивости солитонов в средах со слабой дисперсией относительно раскачки поперечных колебаний удобно решать в рамках уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\nu^2 u + \frac{1}{4}\, u_{xx} + \frac{3}{4}\, u^2\right) + \frac{3}{4}\,\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \qquad (1)$$

выведенного в работе Кадомцева и Петвиашвили [1], в которой было показано, что солитон

$$u_0(x) = \frac{2\nu^2}{\mathrm{ch}^2 \nu x}\,, \qquad (2)$$

являющийся стационарным решением (1), устойчив относительно поперечных колебаний, если $\beta^2 > 0$, и неустойчив, если $\beta^2 < 0$. Если $u = u_0 + \delta u$, $\delta u \sim e^{i\Omega t + ipy}$, то

$$\Omega^2 = \beta^2 \nu^2 p^2 + \dots \quad . \tag{3}$$

В среде с дисперсионной длиной λ случай $\beta^2 \lessgtr 0$ осуществляется, если закон дисперсии имеет вид

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 (1 \pm \lambda^2 k^2 + \dots).$$

В работе [2] было отмечено, что к уравнению (1) применим метод обратной задачи рассеяния (см. также [3]). Если взять функцию $F(x, z, y, t)$, удовлетворяющую двум уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - \nu^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \right), \tag{4}$$

$$\beta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

и решить при всех x, y, t интегральное уравнение

$$F(x, z, y, t) + K(x, z, y, t) + \int_x^\infty K(x, s, y, t) F(s, z, y, t)\, ds = 0, \tag{6}$$

то величина $u(x, y, t) = 2\frac{d}{dx} K(x, x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1), даже если u принадлежит к любой матричной алгебре. В частности для солитона (2)

$$F = F_0 = 2\nu e^{-\nu(x+z)}; \qquad K = K_0 = \frac{2\nu e^{-\nu(x+z)}}{1 + e^{-2\nu x}} \quad .$$

Цель настоящей заметки – найти методом обратной задачи точное выражение для $\Omega^2(p)$, а также исследовать вопрос о нелинейных колебаниях солитона (при $\beta^2 > 0$) и о нелинейной стадии его неустойчивости (при $\beta^2 < 0$).

2. Пусть u, F, K – матрицы вида $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix}$. Тогда u_1 удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\nu^2 u_1 + \frac{1}{4} u_{1xx} + \frac{3}{2} u_0 u_1 \right) + \frac{3}{4} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_1 .$$

Полагая $F = \phi(y, t) e^{-\eta x - \kappa z}$, найдем из (6)

$$K_1(x, x; y, t) = \phi(y, t) e^{-(\eta+\kappa)x} \left(-1 + \frac{2\nu}{\nu + \kappa} \frac{1}{1 + e^{2\nu x}} \right) \left(1 + \frac{1}{1 + e^{2\nu x}} \right).$$

Из условия убывания $u_1(x, y, t)$ при $x \to \pm\infty$, находим $\kappa = \nu$ и $\mathrm{Re}(\nu-\eta) > 0$. Из условий совместности уравнений (4), (5) для F, получаем

$$\phi(y,t) = \phi_0 e^{i\Omega t + ipy} \qquad \Omega^2 = \beta^2 p^2(\nu^2 - i\beta p). \tag{7}$$

Знак β нужно выбирать из условия $\mathrm{Im}\,\Omega \geqslant 0$ при $|p| \to \infty$. При $\beta^2 > 0$ формула (11) описывает спектр затухающих колебаний, а при $\beta^2 < 0$ – инкремент неустойчивости солитона. При $|p| \to 0$ из (7) следует результат Кадомцева – Петвиашвили (3). В физических переменных амплитуда солитона описывается отклонением $\delta c / c$ его скорости от скорости звука – уравнение (1) применимо, если толщина солитона $lx \sim \lambda (c/\delta c)^{1/2} << ly$. В этих переменных минимальный поперечный неустойчивый масштаб $ly \sim \frac{\beta}{\nu^2} \sim \lambda \frac{c}{\delta c} >> lx$, что оправдывает применимость формулы (7) при $\delta c / c << 1$.

3. Рассмотрим более широкий класс точных решений уравнения (1). Пусть u – скаляр и $\beta^2 < 0$. Выберем функцию F в виде

$$F = \Psi(x, y, t)\,\Psi^*(z, y, t).$$

Из условий совместности уравнений (4, 5) имеем

$$\Psi(x, y, t) = \int a(\eta) e^{\eta(\nu^2 - \eta^2)t + i(\eta^2 - \nu^2)y - \eta x} d\eta. \tag{8}$$

Решая уравнение (6), найдем точное решение уравнения (1) вида

$$u(x, y, t) = -2\frac{d}{dx} \frac{|\Psi(x, y, t)|^2}{1 + \int_x^\infty |\Psi(x, y, t)|^2 dx}. \tag{9}$$

В частности, если

$$\Psi(x, y, t) = \int_0^\nu a(\eta) e^{\eta(\nu^2 - \eta^2)t + i(\eta^2 - \nu^2)y - \eta x} d\eta + \sqrt{2\nu} e^{-\eta x} \tag{10}$$

мы получим решение, стремящееся при $t \to -\infty$ к солитону (2) и описывающее его неустойчивость. Исследуя случай $a(\eta) = a\delta(\eta - \eta_0)$; $\eta_0 < \nu$, убеждаемся, что решение (9) при $t \to +\infty$ переходит в солитон меньшей амплитуды $2\eta_0^2$ и равномерно по x убывающий колебательный "фон". Устремляя $\eta_0 \to 0$, можно добиться полного исчезновения исходного солитона.

Возможность полного исчезновения солитона в результате развития неустойчивости объясняется тем, что при $\beta^2 < 0$ солитон движется с дозвуковой скоростью $\delta c < 0$ и может отдавать энергию обгоняющим его малым колебаниям среды. Промежуточная картина развития неустойчивости зависит от конкретного вида функции $a(\eta)$.

4. В устойчивом случае $\beta^2 > 0$ также можно построить точное решение уравнения (1), зависящее от произвольной функции. Положим

$$F = \chi(x, y, t) e^{-\nu z} .$$

Тогда

$$u(x, y, t) = -2 \frac{d}{dx} \frac{\chi(x, y, t) e^{-\nu x}}{1 + \int\limits_x^\infty \chi(x, y, t) e^{-\nu x} dx} , \tag{11}$$

где из условия совместности уравнений (4), (5)

$$\chi(x, y, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(k) \exp[iky - \eta x + \eta(\eta^2 - \nu^2) t] dk; \quad \eta^2 \approx \nu^2 - ik .$$

Если $c(k) = 2\nu\delta(k) + \tilde{c}(k)$, то решение (11) описывает затухающие нелинейные колебания солитона. В устойчивом случае $\beta^2 > 0$ солитон является сверхзвуковым, и его колебания затухают за счет излучения отстающего от него звука.

Возможность исчезновения солитонов за счет неустойчивости при $\beta^2 < 0$ приводит к тому, что ударные волны в средах с положительной дисперсией $\omega_k'' > 0$ имеют существенно турбулентную структуру.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 июля 1975 г.

Литература

[1] Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, 192, 753, 1970.

[2] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Функциональный анализ и его приложения, 8, 43, 1974.

[3] В.С.Дрюма. Письма в ЖЭТФ, 19, 753, 1974.