Письма в ЖЭТФ, том 22, вып.7, стр. 371 – 373 5 октября 1975 г.

НЕОДНОРОДНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В.Л.Покровский, С.Б.Хохлачев

В работе найдены точные волновые функции солитонов и соответствующие им собственные значения Гейзенберговского гамильтониана.

В настоящей работе строятся точные волновые функции и находятся собственные значения гамильтониана

$$H = -\sum_{\mathbf{x},\mathbf{a}} J_{\alpha\beta}\, s^{\alpha}_{\mathbf{x}+\mathbf{a}}\, s^{\beta}_{\mathbf{x}} \,, \qquad (1)$$

где $J_{\alpha\beta}$ – симметричная, положительно определенная матрица, s^{α}_{x} – оператор спина, $\mathbf{x}$ нумерует точки решетки, сумма по $\mathbf{a}$ обозначает суммирование по ближайшим соседям. Операторы спина подчиняются обычным коммутационным состояниям. Введем локальный оператор вращения $R(\mathbf{x})$, действующий на спиновые матрицы по правилу

$$R^+ s^\alpha R = R^{\alpha\beta} s^\beta , \tag{2}$$

где $R^{\alpha\beta}$ – ортогональная матрица. В формуле (2) для краткости опущен индекс x. Стационарное состояние ищется в виде:

$$| \Psi \rangle = \prod_x R(x) \; | \; 0 \rangle , \tag{3}$$

где $| 0 \rangle$ обозначает основное состояние в модели Гейзенберга. Мы будем считать, что в этом состоянии все спины имеют максимально возможную проекцию на ось "3". Для того, чтобы состояние (3) было стационарным, достаточно, чтобы локальная матрица вращения удовлетворяла системе разностных уравнений:

$$\sum_a J_{\alpha\beta} \; n^\alpha (x + a) \; e_+^\beta (x) = 0 , \tag{4}$$

$$J_{\alpha\beta} e_+^\alpha (x + a) \; e_+^\beta (x) = 0. \tag{5}$$

Обозначения в (4) и (5) следующие:

$$n^\alpha (x) = R^{\alpha\beta}(x) \; e_3^\beta \tag{6}$$

$$e_+^\alpha (x) = R^{\alpha\beta}(x) (e_1^\beta + i e_2^\beta) , \tag{7}$$

где e_i – система ортов, направленных по главным осям тензора $J_{\alpha\beta}$ (напомним, что e_3 совпадает с направлением спина в основном состоянии). Левые части уравнений (4) и (5) являются коэффициентами при $s_-(x)$ и $s_-(x + a) s_-(x)$ соответственно, в уравнении Шредингера. Отметим, что $n^2(x) = 1$, $e_+^2(x) = 0$.
Энергия построенного состояния

$$E = - \sum_{x,a} J_{\alpha\beta} n^\alpha(x + a) n^\beta (x). \tag{8}$$

Уравнение (4) является условием экстремальности энергии (8). Нетрудно убедиться, что в случае одномерной цепочки, уравнение (4) является следствием (5). Для простоты рассмотрим случай, когда два собственных значения $J_{\alpha\beta}$ совпадают: $J_1 = J_2 = J < J_3$ (одноосная анизотропия). В этом случае все вектора $n(x)$, удовлетворяющие уравнению(4), лежат в одной плоскости и определяются одним углом θ_x между осью "3" и вектором $n(x)$. Уравнения (5) сводятся к одному разностному уравнению:

$$\cos (\theta_{x+a} - \theta_x) + \gamma \sin \theta_{x+a} \sin \theta_x = 1, \tag{9}$$

где $\gamma = (J_3 - J)/J$. Исследование уравнения (9) показывает, что кроме тривиального решения $\theta_x = 0$ или π, существует решение типа доменной стенки, в котором θ_x монотонно изменяется от 0 до π, когда x пробегает значение от $-\infty$ до $+\infty$. Решения уравнения (9) нумеруются двумя индексами: дискретным x_0, указывающим номер узла, в котором величина $| \theta_x - \pi/2 |$ минимальна, и непрерывным θ_{x_0}. Энергия от этих параметров не зависит.

В случае большего числа измерений пространства, уравнения (4) и (5) являются несовместными. Однако, в предельном случае, непрерывной изотропной среды, когда изменение $n(x)$ происходит на масштабах L, бо́льших по сравнению с решеточной постоянной a и $J_{\alpha\beta}=J\delta_{\alpha\beta}$ уравнения (5) удовлетворяются автоматически с точностью до малой величины $\sim (a/L)^2$. С точностью $\sim a/L$ построенные нами состояния являются стационарными состояниями гамильтониана Гейзенберга. Уравнение (4) сводится в этом случае к дифференциальному. Оно может быть получено как уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала энергии

$$E = \frac{J}{2} \int d^2 x \left(\frac{\partial n^a}{\partial x_\mu}\right)^2; \qquad n^2(x) = 1. \tag{10}$$

Задача сводится к отысканию нетривиальных экстремумов функционала (9) от классического поля направлений $n(x)$. Точные решения этой задачи в двумерном случае были найдены Скирмом [1].

Таким образом, мы построили неоднородные квантовые состояния гейзенберговского гамильтониана (солитоны). Характеризующая их координата x_0, коммутирует с гамильтонианом. Отсюда следует, что H не зависит от импульса p, сопряженного координате x_0. Поэтому и энергия состояния с определенным импульсом от него не зависит. Следовательно, скорость движения солитонов равна нулю. Причина неподвижности солитонов заключена в сохранении двух важных характеристик системы: проекции полного спина и топологической характеристики решения – степени отображения [2]. В двумерном и трехмерном случаях степень отображения имеет смысл только в непрерывном пределе. Для решеточной системы такая величина может сохраняться лишь приближенно. Вследствие этого солитоны больших размеров на решетке будут долгоживущими.

Хотя солитоны отделены энергетической щелью от основного состояния, они могут играть существенную роль в термодинамике и кинетике при низких температурах из-за большого статистического веса.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1975 г.

Литература

[1] T.H.R.Skyrme, Proc. Roy. Soc., A247, 260, 1958; J.K.Perring, T.H.R.Skyrme, Nucl. Phys., 31, 550, 1962.

[2] А.М.Поляков. ЖЭТФ, 68, 1975,1975.