

ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЕ ДЕРЕВЬЯ И $3nj$ -КОЭФФИЦИЕНТЫ

Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский

Даны простые правила построения базисных волновых гиперсферических функций для системы с многими степенями свободы. Обнаруживается связь между коэффициентами преобразования деревьев и коэффициентами Рака (и $3nj$ — символами).

Ранее в работах [1, 2] были сформулированы правила записи решений уравнения Лапласа на многомерных сферах (метод деревьев) и правила графического представления $3nj$ -коэффициентов. Каждый узел дерева характеризовался константой разделения переменных α_i и числом вышележащих узлов: $S_{\alpha_i} = N_i - 2$, где N_i — число измерений подпространства, а α_i ($\alpha_i + S_{\alpha_i}$) есть квадрат гипермомента. Интегрирование проводилось по $N_i - 3$ -мерной сфере. Эти правила можно упростить, характеризуя узел не двумя, а только одним параметром и интегрируя с мерой, отвечающей 3-мерной сфере $O(4)/O(3)$. Узел характеризуется

$$j_{\alpha_i} : 2j_{\alpha_i} + 1 = \alpha_i + \frac{S_{\alpha_i}}{2}. \text{ Тогда для множителя (каждый узел вносит в}$$

решение свой множитель) можно записать следующее выражение, представленное через полином Якоби:

$$\begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad j \end{array} = N^{-1/2} (j_1 j_2 j) (1-x)^{\frac{2j_2+1}{2}} (1+x)^{\frac{2j_1+1}{2}} P_{j-j_1-j_2-1}^{2j_2+1, 2j_1+1}(x) \quad (1)$$

где

$$N(j_1 j_2 j) = \frac{2^{2j_1+2j_2+3} \Gamma(j+j_1-j_2+1) \Gamma(j-j_1+j_2+1)}{(2j+1) \Gamma(j-j_1-j_2) \Gamma(j+j_1+j_2+2)}.$$

Это решение включая норму, есть не что иное как нормированная на единицу на 3-сфере $d_{j_1+j_2+1, j_1-j_2}^j(x)$ — функция Вигнера [3], допускающая аналитическое продолжение на четвертьцелые (при нечетных S_{α_i}) значения j .

Переходу от одной кластерной функции к другой отвечает "пересадка" ветки типа см. [4, 5]:



Рис. 1

Матрица такого перехода есть интеграл перекрытия между функциями, соответствующими левому и правому деревьям. Она определяется гипергеометрической функцией ${}_4F_3$ от единичного аргумента [4,5]. Используя связь $6j$ -символов с ${}_4F_3$ ($\dots, \dots, 1$), их симметрию относительно замены $j \rightarrow -j - 1$ и симметрию, определяемую формулами 22.10, 22.22 [6], можно представить матрицу преобразования между деревьями (рис. 1) как

$$\left\| \begin{matrix} j_1 j_2 j_3 \\ j_{12} j_{23} \end{matrix} \right\| = i (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j_{12} \\ j_3 j_{23} \end{matrix} \right\} \frac{1}{2} \left[\Phi_{j_1 j_3 j}^{j_1 j_2 j_{23}} + \Phi_{j_1 j_3 j}^{j_1 j_2 j_{23}} \right], \quad (2)$$

где

$$\Phi_{j_1 j_3 j}^{j_1 j_2 j_{23}} = (-)^{j_{12} + j_3} \left\{ \frac{\sin(j - j_1 - j_{23}) \pi (-)^{j - j_1 - j_{23}} \sin 2\pi j}{\sin 2\pi j_{12} \sin 2\pi j_3} \right\}, \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j_{12} \\ j_3 j_{23} \end{matrix} \right\} - 6j\text{-символ}$$

Таким образом $6j$ -символ связан с поворотами 3-сферы. При пересадках встречаются также схемы с одной или двумя открытыми вилками:



Рис. 2

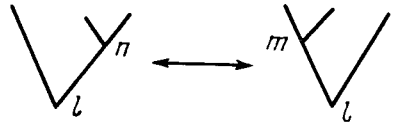


Рис. 3

Матрицы таких переходов выражаются через ${}_3F_2$ ($\dots, \dots, 1$) и ${}_2F_1$, т. е. являются либо $3j$ -символами, либо d_{mn}^l -функциями от угла $\pi/2$ [4, 5]. С другой стороны, эти матрицы являются частным случаем матрицы (2). Можно показать, что свободные концы можно считать узлами с $\alpha, \beta = 0$, $S_\alpha, S_\beta = -1$, т. е. считать j_α и j_β равными $-3/4$.

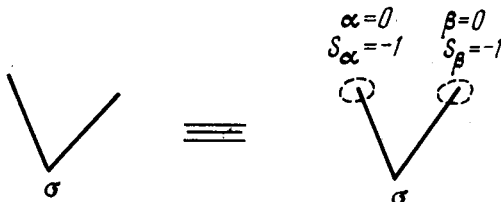


Рис. 4

Это видно, например из формулы для полинома Чебышева

$$T_n(\cos \phi) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} P_n^{-1/2, -1/2}(\cos \phi) = \cos \phi.$$

Поскольку коэффициенты Рака и Клебша – Гордана выражаются соответственно через ${}_4F_3$ и ${}_3F_2$ от единичного аргумента, то интересно показать, что $9j$ -символ определяется функцией ${}_5F_4(\dots)$. Из сказанного выше видно, что коэффициенты преобразования гиперсферических функций представляют собой аналоги $3nj$ -коэффициентов. Например, задача симметризации волновой функции 3 частиц приводит к $9j$ -коэффициентам, из которых составляется матричный элемент перестановки двух осей в 4-мерном пространстве. Таким образом возникают полезные соотношения между матричными элементами поворотов на угол π в многомерном пространстве и алгеброй $3nj$ -коэффициентов. Интересно проследить эту связь для произвольного угла и, в частности, выяснить связь обобщенных гиперсферических функций с $3nj$ -коэффициентами для $n > 2$ (представления для $3nj$ -коэффициентов можно найти, например, в [6, 7]).

Полностью работа будет опубликована позднее.

Авторы благодарят за обсуждения и замечания А.И.Базя, В.Г.Зелевинского, Ю.А.Данилова, В.Ф.Демина, М.С.Кильдюшова, В.В.Пустовалова, Е.Л.Суркова, В.А.Ходеля, В.Д.Эффоса.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
18 июля 1975 г.

Литература

- [1] Н.Я.Виленкин, Г.И.Кузнецов, Я.А.Смородинский. ЯФ, 2, 906, 1965.
- [2] Г.И.Кузнецов, Я.А.Смородинский. ЯФ, 21, 1135, 1975.
- [3] Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М., изд. Наука, 1965.
- [4] М.С.Кильдюшов. ЯФ, 15, 197, 1972.
- [5] М.С.Кильдюшов, Г.И.Кузнецов. Препринт. ИАЭ-2263, 1973.
- [6] А.П.Юцис, А.А.Бандзайтис. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс "Минтис", 1965.
- [7] Д.А.Варшалович, А.И.Москалев, В.К.Херсонский. Квантовая теория углового момента, Ленинград, изд. Наука, 1975.