Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 7, стр. 396 – 399 *5 октября 1975 г.*

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ НА СУПЕРПРОСТРАНСТВАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ

В.П. Акулов, Д.В. Волков, В А Сорока

Обсуждаются варианты общековариантной теории суперполей с ненулевыми значениями тензоров кручения и тензора кривизны.

1. Недавно в работах [1, 2] была предложена общековариантная теория суперполей для суперпространства с координатами $z^A = (x^\mu, \phi^a, \phi^{\dot a})$ (x^μ – обычные пространственные координаты, ϕ^a и $\phi^{\dot a}$ – антикоммутирующие спинорные координаты)[1].

Обобщение уравнения Эйнштейна для суперпространства имеет вид [2]

$$R_{AB} = 0, \tag{1}$$

где $R_{AB} = R_{AC;B}{}^C$ и $R_{AB;C}{}^D$ – тензор кривизны суперпространства.

---

[1] Подробную библиографию по суперсимметрии см. [3], где пропущена ссылка на пионерскую работу [4].

При разложении суперполя метрического тензора g_{AB} по обычным полям уравнение (1) приводит к уравнениям второго порядка, как для полей с целым, так и для полей с полуцелым спином. Последнее обстоятельство обусловлено отсутствием в структурных константах максимальной группы голономии[1)] риманова суперпространства, удовлетворяющего уравнению (1), величин, которые могут играть роль матриц γ_μ в уравнениях для полей с полуцелым спином, и является недостатком теории.

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на существование общековариантных теорий, свободных от указанного выше недостатка.

2. Уравнения Картана для суперпространства с координатами z^A могут быть записаны в виде [5]

$$d\omega^A(\delta) + \omega^B(\delta)\wedge\Gamma_B{}^A(d) = \frac{1}{2}\,\omega^B(\delta)\wedge\omega^C(d)\,T_{CB}{}^A\,, \qquad (2)$$

$$d\Gamma_A{}^B(\delta) + \Gamma_A{}^C(\delta)\wedge\Gamma_C{}^B(d) = \frac{1}{2}\,\omega^C(\delta)\wedge\omega^D(d)R_{DC;A}{}^B\,, \qquad (3)$$

где $T_{CB;}{}^A$ и $R_{CD;A}{}^B$ – тензоры кручения и кривизны. Дифференцирования и произведения форм в выражениях (2) – (3) являются внешними и определяются, так же как и для случая обычных пространств, посредством альтернирования дифференциалов d и δ.

Примем в качестве группы голономии рассматриваемого суперпространства группу Пуанкаре, дополненную трансляцией спинорных переменных. В этом случае только компоненты $\Gamma_\alpha^\beta(d)$, $\Gamma_{\dot\alpha}^{\dot\beta}(d)$ и $\Gamma_\mu^\nu(d)$ дифференциальной формы связности отличны от нуля и удовлетворяют соотношениям

$$2g^{\mu\rho}\Gamma_\rho^\nu(d) = \Gamma_\beta^\alpha(d)(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta + \Gamma_{\dot\beta}^{\dot\alpha}(d)(\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha}^{\dot\beta}, \qquad (4)$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma^\mu\sigma^\nu - \sigma^\nu\sigma^\mu).$$

Инвариантный интеграл действия для суперполей, определяющих дифференциальные формы $\omega^A(d)$ и $\Gamma_B^A(d)$, может быть представлен в виде

$$\int L(R,\ T)W\prod_A dz^A\,, \qquad (5)$$

где L – инвариантная функция тензоров кривизны и кручения и

$$W = \mathrm{Det}\,|\omega_A{}^B|\,, \qquad (6)$$

где матрица $\omega_A{}^B$ определяется коэффициентами форм $\omega^B(d) = dz^A\omega_A{}^B$ [1)].

---

1) Группа голономии является группой преобразований репера при параллельном переносе последнего по бесконечно малому замкнутому контуру.

2) Обсуждение свойств определителей матриц, содержащих антикоммутирующие параметры, проведено в работе [1].

В простейшем случае L является функцией следующих инвариантных величин

$$R_1 = i\,[\,R_{\mu\nu;\alpha}{}^{\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}{}^{\alpha} - R_{\mu\nu;\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}\,], \tag{7а}$$

$$R_2 = i\,(\,R_{\alpha\beta;\gamma}{}^{\beta}\epsilon^{\alpha\gamma} - R_{\dot\alpha\dot\beta;\dot\gamma}{}^{\dot\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}), \tag{7б}$$

$$T_1 = i\,T_{\alpha\dot\beta;}{}^{\mu}(\sigma_{\mu})^{\dot\beta\alpha}, \tag{7в}$$

$$T_2 = i\,[\,T_{\mu\dot\alpha;}{}^{\beta}(\sigma^{\mu})^{\dot\alpha}{}_{\beta} - T_{\mu\alpha;}{}^{\dot\beta}(\sigma^{\mu})_{\dot\beta}{}^{\alpha}]. \tag{7г}$$

3. Рассмотрим случай, когда

$$L = a_1 R_1 + a_2 R_2. \tag{8}$$

Вариация суперполей для отдельных слагаемых интеграл действия (5), (8) имеет вид

$$\widetilde{(R_{DC;A}{}^{B}W)} = \Big\{\Big[-\omega_C{}^{F}R_{FD;A}{}^{B} + \frac{1}{2}(-)^{F}\tilde\omega_F^{F}R_{CD;A}{}^{B} - (-)^{F}T_{CF;}{}^{F}\,\tilde\Gamma_{DB}{}^{A} + \frac{1}{2}\,T_{CD}{}^{F}\tilde\Gamma_{FA}{}^{B}\,\Big] - (-)^{CD}(C\leftrightarrow D)\Big\}\,W, \tag{9}$$

где волна над величинами обозначает их вариацию, а множители вида $(-)^F$ определяют знаки соответствующих слагаемых в зависимости от их градуировки.

Уравнения для суперполей устанавливаются подстановкой выражения (9) в (7 а, б) и приравниванием нулю коэффициентов при независимых вариациях $\tilde\omega_A{}^{B}$, $\tilde\Gamma_{A\alpha}{}^{\beta}$ и $\tilde\Gamma_{A\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$.

Существенным отличием уравнений, получаемых из лагранжиана (8) от обобщенных уравнений Эйнштейна, рассмотренных в [1, 2] является то, что в результате ослабления группы голономии не все компоненты тензора кручения равны нулю[1]. В частности, лагранжиан (8) содержит решение, соответствующее суперпространству с постоянным векторным кручением

$$T_{\alpha\dot\beta;}{}^{\mu} = i\,t\,(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot\beta} \tag{10}$$

для которого

$$\Gamma_{A\alpha}{}^{\beta} = \Gamma_{A\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = 0,\quad \omega^{\alpha} = d\phi^{\alpha},\qquad \omega^{\dot\alpha} = d\phi^{\dot\alpha}$$

---

[1] Заметим, что если равенство всех компонент тензора кручения нулю потребовать дополнительно, то последнее выполняется для лагранжиана (8) только при условии, что все компоненты тензора кривизны также обращаются в нуль.

и

$$\omega^{\mu}(d) = dx^{\mu} + \frac{t}{2i}(\phi\sigma^{\mu} d\phi^{+} - d\phi\sigma^{\mu}\phi^{+}). \qquad (11)$$

Такое суперпространство, впервые введенное в работах [6, 7], составляет основу различных вариантов теории суперсимметрии [3].

Для решений, мало отличающихся от (11), лагранжиан приводит к типично суперсимметричной структуре суперполей.

4. При наличии в лагранжиане инвариантных комбинаций тензора кручения,вариации таких комбинаций могут быть выражены через величину

$$\widetilde{(T_{BC;}{}^{A}W)} = \Big\{ \Big[-\tilde{\omega}_{B}^{F} T_{FC;}{}^{A} + \frac{1}{2}(-)^{F}\tilde{\omega}_{F}{}^{F} T_{BC;}{}^{A} + (-)^{AC+F}\omega_{B}{}^{A} T_{FC;}{}^{F} +$$

$$+ \frac{1}{2}(-)^{(A+F)(B+C+F)}\tilde{\omega}_{F}{}^{A} T_{BC;}{}^{F} + \tilde{\Gamma}_{BC;}{}^{A}\Big] - (-)^{BC}(B \leftrightarrow C)\Big\} W \qquad (12)$$

$$\tilde{W} = (-)^{F}\tilde{\omega}_{F}^{F} W \ .$$

Требование, чтобы пространство с постоянным векторным кручением допускалось уравнениями движения приводит в этом случае к определенным соотношениям между константами при различных степенях тензора кручения (7в) в лагранжиане.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1975 г.

Литература

[1] R. Arnowitt, P.Nath, B.Zumino. Phys. Lett., 56B, 81, 1975.

[2] R.Arnowitt, P.Nath. Phys. Lett., 56B, 177, 1975.

[3] B.Zumino. CERN preprint TH. 1901, 1974.

[4] Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452, 1971.

[5] Д.В.Волков. В.А.Сорока. ТМФ, 20, 291, 1974.

[7] Д.В.Волков, В.П.Акулов. Письма в ЖЭТФ, 16, 621, 1972; ТМФ, 18, 39, 1974.

[7] Abdus Salam, J.Strathdee. Nucl. Phys., B76, 477, 1974.