Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 8, стр. 412 – 415 20 октября 1975 г.

ДИСПЕРСИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ВОЛН В *А*-ФАЗЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО He^3

Г.Е.Воловик

Получен линейный закон дисперсии для орбитальных волн в *А*-фазе He^3.

Орбитальные волны – это коллективные возбуждения, связанные с нарушением инвариантности относительно вращений в *А*-фазе He^3. Дисперсия орбитальных волн, вычисленная [1] вблизи T_c без учета диссипативных процессов имеет вид $\omega \sim \rho_s q^2/mL$, где q – волновой вектор, ρ_s – сверхтекучая плотность, L – плотность спонтанного орбитального момента *А*-фазы. Величина L, найденная в работе Кросса [2], а также в работе автора [3], оказалась порядка $\rho_s (T_c/\epsilon_F)^2$. Учет диссипативных процессов, произведенный Кроссом и Андерсоном [4], показал, что орбитальные волны с квадратичным законом дисперсии сильно затухают в силу малости величины L по сравнению с коэффициентом вязких сил μ (вблизи T_c $\mu = (\pi^2/128)(N_F \tau \Delta^2(T) / T_c)$, где τ – время релаксации в нормальной ферми-жидкости, N_F – плотность состояний на ферми-поверхности). Покажем, что в A-фазе имеется область температур вблизи T_c, в которой при достаточно высоких частотах (но в пределах применимости гидродинамики $\omega << 1/\tau$), квадратичный закон дисперсии орбитальных волн переходит в линейный, а их затухание становится слабым.

Квазиравновесное состояние A-фазы He^3 характеризуется локальным поворотом тройки векторов $\vec{\Delta}'$, $\vec{\Delta}''$, $\mathbf{l}$, описывающей параметр порядка аксиального состояния Андерсона – Морела, относительно положения равновесия на угол $\theta(\mathbf{r}, t)$. Уравнение движения для θ следует из уравнения для изменения момента импульса $\delta \mathbf{L}$

$$\delta \dot{\mathbf{L}} = - \frac{\partial F}{\partial \vec{\theta}} - \mu \dot{\vec{\theta}}_\perp, \tag{1}$$

где F – свободная энергия, а второй член в правой части – момент вязких сил, вычисленный в [4], $\vec{\theta}_\perp$ – проекция $\vec{\theta}$ на ось, перпендикулярную $\mathbf{l}$. Изменение момента $\delta \mathbf{L}$ связано как с поворотом спонтанного момента $\mathbf{L}$ на угол $\vec{\theta}$, так и с появлением индуцированного момента, пропорционального угловой скорости вращения $\dot{\vec{\theta}}$:

$$\delta \mathbf{L} = [\vec{\theta} \mathbf{L}] + \overleftrightarrow{\chi} \dot{\vec{\theta}}. \tag{2}$$

Найдем тензор χ в приближении слабой связи. Для этого заметим, что поворот тройки векторов $\vec{\Delta}'$, $\vec{\Delta}''$, $\mathbf{l}$ на угол $\vec{\theta}$ приводит к следующему изменению фазы параметра порядка

$$\phi_\mathbf{k} = \mathrm{Im} \frac{\delta \Delta_\mathbf{k}}{\Delta_\mathbf{k}} = \mathrm{Im} \frac{(\mathbf{k}, [\vec{\theta} \vec{\Delta}])}{(\mathbf{k} \vec{\Delta})} = \frac{[\vec{\theta} \mathbf{k}][\mathbf{k}\, \mathbf{l}]}{[\mathbf{k}\, \mathbf{l}]^2} \quad . \tag{3}$$

Такое изменение фазы эквивалентно добавлению к гамильтониану члена

$$F_\phi = \int d^3 r \sum_\mathbf{k} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}_\mathbf{k} (\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} (\mathbf{k} \vec{\nabla}) \phi_\mathbf{k} (\mathbf{r}, t) \right] n_\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) \tag{4}$$

как и в обычной сверхтекучести с той лишь разницей, что ϕ зависит от направления импульса $\mathbf{k}$. Коэффициент при $-\dot{\vec{\theta}}$ в правой части (4) имеет смысл плотности момента импульса, поэтому вариация плотности момента импульса

$$\delta \mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \sum_\mathbf{k} \mathbf{l}_\mathbf{k} \delta n_\mathbf{k}(\mathbf{r}, t), \qquad \mathbf{l}_\mathbf{k} = \frac{[\mathbf{k}[\mathbf{l}\, \mathbf{k}]]}{2[\mathbf{k}\, \mathbf{l}]^2} \quad . \tag{5}$$

В локальном равновесии функция распределения частиц $n_\mathbf{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\xi_\mathbf{k}}{E_\mathbf{k}} \mathrm{th} \frac{E_\mathbf{k}}{2T}$, где $E_\mathbf{k} = (\xi_\mathbf{k}^2 + |\Delta_\mathbf{k}|^2)^{1/2}$ – энергия квазичастиц (здесь не учитываются нечетные по $\mathbf{k}$ члены, которые не дают вклад в $\delta \mathbf{L}$).

Подставляя в (5) $\delta n_{\mathbf{k}} = \dfrac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial \xi_{\mathbf{k}}} \dfrac{\dot{\phi}_{\mathbf{k}}}{2} + \dfrac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} \delta |\Delta_{\mathbf{k}}|^2$ и учитывая, что вариация модуля параметра порядка $\delta |\Delta_{\mathbf{k}}|^2 = 2\Delta^2(T)(\mathbf{kl})(\vec{\theta}, [\mathbf{kl}])$, получаем для $\delta \mathbf{L}$ выражение (2) со следующими значениями величин тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ и вектора $\mathbf{L}$:

$$\chi_{ij} = \frac{N_F}{4} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{[\mathbf{k}[\mathbf{kl}]]_i [\mathbf{k}[\mathbf{kl}]]_j}{[\mathbf{kl}]^4} \tag{6}$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{l} \frac{\Delta^2(T)}{4} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{l})^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\operatorname{th} \frac{E}{2T}}{E}, \qquad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \tag{7}$$

Последнее выражение было получено в [3] с помощью матричного кинетического уравнения [5]. Рассмотрим компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi}$. Продольная часть тензора $\chi_{\parallel} = N_F/4$. С помощью этого выражения можно убедиться, что продольная компонента уравнения (1) представляет собой уравнение непрерывности. Действительно фаза конденсата $\phi_0 = -\theta_{\parallel}$, поэтому $-\dfrac{\partial F}{\partial \theta_{\parallel}} = \dfrac{\partial F}{\partial \phi_0} = -\dfrac{1}{2} \vec{\nabla} \mathbf{j}$, а $\delta L_{\parallel} = -\dfrac{N_F}{4} \dot{\phi}_0 = \dfrac{1}{2} \delta \rho$.

Заметим, что такая зависимость $\delta L_{\parallel}$ от $\delta \rho$ могла бы привести к выводу о том, что спонтанный момент $\mathbf{L} = \hbar \rho \mathbf{l}/2$, как это предлагает Холл [6], т. е. все пары имеют одинаково направленный орбитальный момент $\mathbf{l}$. Этот вывод в принципе не противоречит результатам работы [3] и настоящей работы, так как в них вычислялось изменение момента в результате локального отклонения системы от положения равновесия. Однако вывод Холла, что именно момент $\mathbf{L} = \hbar \rho \mathbf{l}/2$ входит в выражение (2), неверен, поскольку уравнения (1), (2) при $T = 0$ могут быть получены непосредственно из матричного кинетического уравнения с учетом самосогласованного уравнения для параметра порядка. При этом для $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\mathbf{L}$ получаются выражения (6) и (7).

Рассмотрим теперь поперечную компоненту тензора

$$\chi_{\perp} = \frac{N_F}{8} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{[\mathbf{kl}]^2}.$$

Интеграл по углам логарифмически расходится. Расходимость связана с тем, что выражение для $\chi_{\perp}$ становится неприменимым в области таких $\mathbf{k}$, где величина щели $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta(T)|[\mathbf{kl}]|$ становится сравнимой с частотой ω. Поэтому, ограничивая интегрирование областью углов $|[\mathbf{kl}]| > \omega/\Delta(T)$, получаем

$$\chi_{\perp} \approx \frac{N_F}{8} \ln \frac{\Delta(T)}{\omega}. \tag{8}$$

Вычисление методом матричного кинетического уравнения при $T = 0$

дает вместо $\ln\frac{\Delta(0)}{\omega}$ комплексную величину $\ln\frac{\Delta(0)}{\omega}+\frac{\pi i}{4}$. Мнимая часть возникает из-за возможности рождения возбуждений при любой сколь угодно малой ω, поскольку щель в спектре возбуждений обращается в нуль при $\mathbf{k}\parallel\mathbf{l}$. При $\ln\frac{\Delta(T)}{\omega}\gg 1$ связанный с этой мнимой добавкой вклад в затухание орбитальных волн является слабым. Выясним, при каких частотах и температурах можно пренебречь в уравнении (1) вязким членом $-i\omega\mu\vec{\theta}_{\perp}$. Сравнивая его с динамическим членом $\omega^2\chi_{\perp}\vec{\theta}_{\perp}$, получаем следующее ограничение на частоту

$$\frac{1}{\tau}\gg\omega\gg\frac{\mu}{\chi_{\perp}}. \tag{9}$$

Левое неравенство должно обеспечить применимость гидродинамики. Неравенства (9) совместны при $\Delta(T)\ll\left(\frac{16}{\pi^2}\frac{T_c}{\tau^2}\ln\frac{\Delta(T)}{\omega}\right)^{1/3}\sim$ $\sim 0{,}2T_c\ln^{1/3}\frac{\Delta(T)}{\omega}$, если τ, как и в [4] взять из данных по спиновой диффузии ($\tau\sim 2\cdot10^{-13}/T^{2}$ *сек*). Следовательно, слабо затухающие волны возможны при $T_c-T<10^{-2}T_c$. Выпишем уравнения для орбитальных волн в режиме четвертого звука ($v_n=0$), используя выражение для свободной энергии F из [1]

$$\omega^2\chi_{\perp}\vec{\theta}_{\perp}=\frac{\rho_{s_{\parallel}}}{8m}\left[2\mathbf{q}_{\perp}q_{\parallel}\phi_0+(2q_{\parallel}^2+q^2)\vec{\theta}_{\perp}\right],$$

$$\omega^2\chi_{\parallel}\phi_0=\frac{\rho_{s_{\parallel}}}{4m}\left[(q_{\parallel}^2+2q_{\perp}^2)\phi_0+q_{\parallel}\mathbf{q}_{\perp}\vec{\theta}_{\perp}\right]. \tag{10}$$

Как видно, орбитальные волны зацепляются с колебаниями плотности. Расцепление возможно лишь при $\ln\frac{\Delta(T)}{\omega}\gg 1$, т. е. при $\chi_{\perp}\gg\chi_{\parallel}$. В этом случае дисперсия орбитальных волн имеет следующий вид:

$$\omega^2=\frac{\rho_{s_{\parallel}}}{8m\chi_{\perp}}q^2\frac{2q_{\perp}^2+3q_{\parallel}^2}{2q_{\perp}^2+q_{\parallel}^2}. \tag{11}$$

Автор благодарен В.П.Минееву за сотрудничество в работе, а также И.М.Халатникову за любезно предоставленную возможность ознакомиться с тезисами 14-й Международной конференции по физике низких температур.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 сентября 1975г,

Литература

[1] P.Wölfle. Phys. Lett., 47A, 224, 1974.

[2] M.C.Cross. Submitted to J. Low. Temp. Phys.

[3] Г.Е.Воловик. Письма в ЖЭТФ, 22, 234, 1975.

[4] M.C.Cross, P.W.Anderson. Proceedings of 14-th International Conference on Low Temperature Physics, Finland 1975, v. 1, p. 29.

[5] O.Betbeder-Matibet, P.Nozieres. Ann. Phys., 51, 392, 1969.

[6] H.E.Hall. Proceedings of 14-th International Conference on Low Temperature Physics, Finland, 1975, v. 1, p. 33.