*Письма в ЖЭТФ, том 22, вып 9, стр. 446 – 449 5 ноября 1975 г*

# АНАЛОГ ЗАТУХАНИЯ ЛАНДАУ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

*Д. Д. Рютов*

Показано, что малое начальное возмущение в жидкости с пузырьками газа затухает до конца даже в отсутствие каких-либо диссипативных процессов вследствие перекачки энергии звуковых волн в энергию собственных колебаний пузырьков. Приведены другие примеры макроскопических систем, в которых проявляется указанный эффект, аналогичный затуханию Ландау в физике плазмы.

Рассмотрим жидкость с хаотически и в среднем однородно распределенными в ней газовыми пузырьками. Характерный радиус пузырьков $R$ будем считать малым по сравнению с расстоянием $l$ между ними; при этом доля объема $a$, занятая пузырьками, мала: $a \sim (R/l)^3 \ll 1$. При исследовании распространения в такой среде звуковых волн с длиной волны $\lambda \gg l$ среду можно рассматривать как "сплошную" и пользоваться макроскопическими уравнениями для средних (по объему с размером, малым по сравнению с $\lambda$, но большим по сравнению с $l$) величин. При таком подходе плоская звуковая волна малой амплитуды описывается уравнением (см., например, обзор [1]):

$$\partial^2 \delta \bar{\rho}/\partial t^2 = \partial^2 \delta \bar{p}/\partial x^2 , \qquad (1)$$

где $\delta\bar{\rho}$ и $\delta\bar{p}$ – возмущения (средних) плотности и давления. Связь между $\delta\bar{\rho}$ и $\delta\bar{p}$ определяется уравнением

$$\delta\bar{\rho} = \frac{\delta\bar{p}}{s_{ж}^2} - 4\pi\rho_{ж} \int_0^\infty \xi_r r^2 f(r)\, dr , \qquad (2)$$

где $s_{ж}$ – скорость звука в чистой жидкости, $\rho_{ж}$ – плотность чистой жидкости, $f(r)$ – функция распределения пузырьков по размерам ($f(r)dr$ – число пузырьков, имеющих радиус в интервале $r$, $r+dr$, отнесенное к единице объема), $\xi_r$ – изменение радиуса некоторого пузырька под действием переменного давления (поскольку это изменение при данном $\delta\bar{p}$ зависит от $r$, мы помечаем $\xi$ индексом $r$). Изменение радиуса пузырька во времени описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \omega_0^2(r)\,\xi_r = -\frac{\partial\bar{p}}{\rho_{ж} r} , \qquad (3)$$

где $\omega_0(r)$ – собственная частота радиальных колебаний пузырька. В распространенном случае изотермического изменения объема пузырька (см. [1]) $\omega_0^2 = 3p/\rho_{ж} r^2$, где $p$ – невозмущенное давление в среде. Отметим соотношение $s_{Г}^2 \sim p/\rho_{Г}$, где $s_{Г}$ – скорость звука в газе, заполняющем пузырьки, а $\rho_{Г}$ – плотность этого газа. Из этого соотношения следует, что параметр $\epsilon = p/\rho_{ж} s_{ж}^2$ по порядку величины равен $(\rho_{Г}/\rho_{ж})(s_{Г}/s_{ж})^2$ и, следовательно, мал по сравнению с единицей.

В уравнениях (1) – (3) диссипативные процессы не учитываются. Тем не менее, как будет показано ниже, звуковая волна затухает до конца и в этом случае – за счет процесса, аналогичного затуханию Ландау электростатических колебаний плазмы [2]. Наиболее просто декремент затухания определяется в случае, когда занятая пузырьками доля объема $\alpha$ мала по сравнению с $\epsilon$. При этом второе слагаемое в правой части уравнения (2) мало́ по сравнению с первым и может быть учтено как возмущение. В нулевом приближении по $\alpha$ из (1) и (2) для возмущений вида $e^{-i\omega t + ikx}$ следует обычное дисперсионное соотношение $\omega = ks_{ж}$. В следующем приближении нетрудно получить поправку к частоте

$$\omega = ks_{ж}\left[1 + 4\pi s_{ж}^2 \int_0^\infty \frac{r f(r)\, dr}{(ks_{ж} + i0)^2 - \omega_0^2(r)}\right]$$

В последнем слагаемом мы пишем $ks_{ж} + i0$ вместо $ks_{ж}$, учитывая, что возмущение должно исчезать при $t \to -\infty$. Малый вклад пузырьков в вещественную часть частоты не представляет интереса; декремент может быть найден при помощи известной формулы $\mathrm{Im}(x+iO)^{-1} = -\pi\delta(x)$. Результат имеет вид

$$\gamma = 2\pi^2 s_Ж^2 \int_0^\infty r f(r)\delta\,[k s_Ж - \omega_0(r)]dr\,. \qquad (4)$$

Для волн с частотами, лежащими в интервале резонансных частот пузырьков (т. е. с $k \sim \sqrt{\epsilon}/R$) справедлива оценка $\gamma/ks_Ж \sim a/\epsilon$ (мы учли что $f \sim a/R^4$). Если разброс $\Delta R$ радиусов пузырьков относительно среднего значения $R$ мал, $\Delta R << R$, то декремент затухания отличен от нуля лишь в узком интервале значений волнового вектора вокруг $k = \omega_0(R)/s_Ж$, но зато величина его возрастает: $\gamma/ks_Ж \sim aR/\epsilon\Delta R$ (поскольку при $\Delta R << R$ $f \sim a/R^3\Delta R$). Последняя оценка декремента справедлива для не слишком "узких" распределений: таких, что интервал резонансных частот $\Delta\omega \sim \omega_0(R)\Delta R/R$ еще велик по сравнению с $\gamma$. В результате возникает следующее ограничение на $\Delta R/R$ : $\Delta R/R >> \sqrt{a/\epsilon}$. Обратный предельный случай требует отдельного рассмотрения.

Выше (в частности, в уравнении (3)), мы пренебрегали затуханием колебаний пузырьков, связанным с излучением ими сферических звуковых волн. Декремент радиационного затухания $\gamma_{rad}$ по порядку величины равен $\omega_0\sqrt{\epsilon}$. Сделанное нами приближение справедливо, если $\gamma >> \gamma_{rad}$, т. е. $a >> \epsilon^{3/2}$. При этом условии за время $\sim\gamma^{-1}$ энергия волны передается в собственные колебания пузырьков, которые затем за значительно бóльшее время $\sim \gamma_{rad}^{-1}$ затухают, порождая вторичные рассеянные волны.

В случае, когда концентрация пузырьков $a$ превышает $\epsilon$, влияние пузырьков на дисперсию становится определяющим. В этом случае для исследования временнóй эволюции гармонического в пространстве ($\infty \exp ikx$) начального возмущения следует применить преобразование Лапласа по времени (ср. [2]). Вычисления, вполне аналогичные тем, которые проделаны в работе [2], показывают, что при $t \to \infty$ зависимость возмущения от времени определяется множителем $\exp qt$, где $q$ – ближайший к мнимой оси корень уравнения[1] $k^2 s_Ж^2 + q^2[1 + F(q)] = 0$. Входящая в него функция $F(q)$ определяется следующим образом: в правой полуплоскости комплексной переменной $q$ она равна

$$4\pi s_Ж^2 \int_0^\infty \frac{r f(r)\,dr}{q^2 + \omega_0^2(r)}\,,$$

а в левой полуплоскости она определяется как аналитическое продолжение этого интеграла. Характерная фазовая скорость звуковых возмущений при $a >> \epsilon$ оценивается как $s_Ж\sqrt{\epsilon/a}$. Соответственно, "резонируют" с пузырьками и сильно затухают возмущения с $ks_Ж \sim \omega_0(R)\sqrt{a/\epsilon}$. Для таких возмущений $\mathrm{Re}\,q \sim \mathrm{Im}\,q \sim \omega_0(R)$. Отметим, что, аналогично случаю ленгмюровских колебаний, экспоненциальный закон убывания возмущений выполняется лишь асимптотически, при $t \to \infty$.

---

[1] Выражение (4), разумеется, есть частный случай этого результата.

Затухание Ландау проявляется и в граничной задаче о пространственном поглощении волны вида $\exp(-i\omega t)$. В работе [3] пространственное поглощение связывалось с радиационным затуханием колебаний пузырьков, что не отвечает физическому содержанию задачи, поскольку время установления стационарного распределения амплитуды по порядку величины равно $(\mathrm{Re}\, q)^{-1}$ и мало по сравнению с обратным декрементом радиационного затухания (который при $a \gg \epsilon$ и $\Delta R \sim R$ может быть оценен по формуле: $\gamma_{\mathrm{rad}} \sim \omega_0 \sqrt{a}$). Амплитуда колебаний спадает в глубь среды по закону $\exp(-\kappa x)$, где $\kappa$ для колебаний с $\omega \sim \omega_0(R)$ оценивается по формуле: $\kappa \sim (a/\epsilon)^{1/2} \omega_0(R)/s_{Ж}$ (при $\Delta R \sim R$).

Затухание Ландау может проявляться и в других макроскопических системах со случайными неоднородностями. Приведем два примера. 1) Плазма с "магнитными нитями", т. е. плазма, где магнитное поле сосредоточено внутри узких далеко отстоящих друг от друга трубок (такая ситуация, видимо, осуществляется в солнечной хромосфере, см.[4]). Длинные звуковые волны в этой системе поглощаются из-за резонансного возбуждения изгибных колебаний нитей (аналогичным свойством будет обладать среда, состоящая из жидкости с натянутыми внутри нее обычными упругими нитями). 2) Изотропное упругое тело, в котором скорость продольного звука значительно превышает скорость поперечного звука, и где имеются случайно расположенные маленькие сферические полости. Длинноволновый продольный звук в такой системе будет затухать вследствие возбуждения слабозатухающих (см. [5]) колебаний полостей.

Помимо прямых приложений, полученные результаты могут представлять интерес с точки зрения использования относительно простых макроскопических систем для моделирования плазменных явлений.

Новосибирский
государственный университет

Поступила в редакцию
25 сентября 1975 г.

## Литература

[1] Г.К.Бэтчелор. Сб. "Механика", №3, стр. 65, 1968.

[2] Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.

[3] E.Meyer, E.Skudrzyk. Akustische Beihefte, 3, 434, 1953.

[4] G.A.Chapman. Astrophys. Journ., 191, 255, 1974.

[5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости, М., изд. Наука, 1965, стр. 136.