Письма в ЖЭТФ, том 22, вып. 10, стр. 503 – 506 *20 ноября 1975 г.*

МЕТАСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНОГО ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

А.А.Белавин, А.М.Поляков

Найдены метастабильные неоднородные состояния ферромагнетика Гейзенберга, которые могут создать конечную корреляционную длину при сколь угодно низких температурах.

Хорошо известно, что в двумерном ферромагнетике с непрерывной симметрией выстраивание спинов отсутствует при какой угодно низкой температуре T. Тем не менее считается [1], что фазовый переход в этой системе может происходить за счет того, что основное состояние при $T \to 0$ является вырожденным. Это приводит к возникновению спиновых волн – голдстоунов и бесконечному радиусу корреляции. Однако, это рассуждение не учитывает следующего явления, которое может сделать корреляционный радиус конечным [2]. Рассмотрим классический ферромагнетик Гейзенберга, так как интересующие нас длинноволновые флуктуации не зависят от квантовых эффектов.

Предположим, что мы вычисляем некоторую корреляционную функцию спинов $\mathbf{n}(x)$. Усреднение происходит по всем возможным полям с весом

$$\exp(-H/T). \tag{1}$$

Если температура $T \to 0$, тогда существенную роль в усреднении играют поля близкие к осуществляющим локальные минимумы энергии (основное и метастабильные состояния)

$$\delta H = 0. \tag{2}$$

Обычно учитывается тривиальный минимум $\mathbf{n}_0(x) = \mathrm{const}$ и поля мало отклоняющиеся от $\mathbf{n}_0(x)$. Но если существуют другие решения (2) с конечной энергией $H = E$ (псевдочастицы), их также необходимо учитывать по следующей причине. Решения уравнения (2) с конечной энергией в двумерном случае не зависят от масштаба. Поэтому, хотя среднее расстояние между такими псевдочастицами при малых T велико $r_{\text{ср}} \sim a \exp(E/T)$ (a – шаг решетки), их радиус из-за масштабной инвариантности того же порядка величины. Существование таких случайных неоднородностей приводит к тому, что корреляция спинов на расстоянии $R > r_{\text{ср}}$ исчезает.

В этой статье мы обнаружим существование нетривиальных решений (2) для двумерного ферромагнетика с числом компонент спина $n^a(x)$ равным трем. Начнем с топологического обсуждения, которое докажет существование таких решений. Подобное рассмотрение поля единичного вектора и выражение для степени отображения содержится в работах [3, 4]. Однако решения со степенями отображения,большими единицы, этими авторами не изучались. Спиновое поле описывается трехкомпонентным единичным вектором $\mathbf{n}(x)$ с взаимодействием

$$H = \int \sum_{a=1}^{3} (\nabla n^a)^2. \tag{3}$$

Значения $n(x)$ можно считать точкой на трехмерной сфере S^2 $\mathbf{n} = (\cos\theta,\ \sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi)$. Интересующие нас поля удовлетворяют условию, которое следует из конечности энергии

$$\mathbf{n}(x) \to (1, 0, 0) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4}$$

Последнее означает, что плоскость $\mathbf{x}$, на которой заданы спины топологически эквивалентна другой сфере S^2, а поле $\mathbf{n}(x)$ производит отображение сферы $\tilde{S}^2 \to S^2$. Ясно, что если два отображения $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{n}_1(x)$ принадлежат к различным гомотопическим классам, они не могут быть непрерывно деформированными одно в другое. Хорошо известно, что существует бесконечное число различных классов отображений $\tilde{S}^2 \to S^2$. Следовательно, фазовое пространство спиновых полей разбивается на бесконечное число компонент, каждая из которых характеризуется определенным целым числом q – степенью отображения. Далее будут найдены минимумы энергии в каждой компоненте фазового пространства. Чтобы сделать это, выразим степень отображения через поле $\mathbf{n}(x)$

$$q = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu} n^\alpha \frac{\partial n^\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} d^2x \tag{5}$$

Это равенство нетрудно доказать, перейдя к сферическим координатам. Тогда получим для степени отображения

$$q = \frac{1}{4\pi} \int \sin\theta(x)\, d\theta(x)\, d\phi(x) \tag{6}$$

Следовательно, q – есть число раз, которое сфера S^2 покрывается при отображении[1].

Существует важное неравенство

$$\left(\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} \right)^2 \geqslant 0. \tag{7}$$

Из (7) и (5) следует, что

$$H = \int \left(\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} \right)^2 d^2x \geqslant 8\pi q . \tag{8}$$

[1] Поля с большим числом компонент $k > 3$ производят отображения $\tilde{S}^2 \to S^{k-1}$. Известно, что все такие отображения стягиваются к тривиальному. Поэтому минимумов, подобных найденным ниже, в этом случае не существует.

Формула (8) дает нижние значения энергии метастабильных состояний в каждом гомотопическом классе. Уравнения, которым удовлетворяют эти состояния, имеют вид

$$\frac{\partial n^a}{\partial x_\mu} = \epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{a\beta\gamma} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} . \tag{9}$$

Чтобы увидеть смысл (9), удобно ввести следующие независимые переменные

$$w_1 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\phi ,$$

$$w_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\phi , \tag{10}$$

$$w = w_1 + i w_2 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} e^{i\phi}$$

Тогда из (9) следует

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}; \qquad \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \tag{11}$$

В (11) мы узнаем условия Коши – Римана. Их общее решение есть

$$w = w_1 + i w_2 = f(z), \qquad \text{где} \quad z = x_1 + i x_2 . \tag{12}$$

Поскольку распределение спинов должно быть непрерывной функцией координат, то единственными особенностями функции f являются полюсы. Таким образом, поле соответствующее метастабильному состоянию с данной энергией $8\pi q$ и граничным условием (4) имеет вид

$$w \equiv \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} e^{i\phi} = \prod_i \left(\frac{z - z_i}{\lambda}\right)^{m_i} \prod_j \left(\frac{\lambda}{z - z_j}\right)^{n_j} , \tag{13}$$

где

$$\Sigma m_i > \Sigma n_j .$$

Степень отображения q есть число праобразов точки $w(r)$, т. е. число решений уравнения (13), выражающих z через w, отсюда

$$q = \Sigma m_j . \tag{14}$$

Выражение (13) можно получить также из известного решения [3,4] со степенью отображения $q = 1$, если воспользоваться конформной инвариантностью гамильтониана (3), имеющейся в двумерном случае.

Таким образом, мы показали, что ферромагнетик обладает неоднородными метастабильными состояниями. По-видимому, это означает, что в системе даже при очень низких температурах имеется конечная длина корреляции и отсутствует фазовый переход.

Количественное влияние метастабильных состояний на низкотемпературную асимптотику корреляционных функций мы надеемся рассмотреть в последующих работах.

Мы благодарны С.Хохлачеву, который обратил наше внимание на конформную инвариантность (3). Один из нас (А.Б.) благодарит Д.Бурланкова за обсуждения.

Горьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
4 октября 1975 г.

Литература

[1] В.Березинский. ЖЭТФ, 59, 907, 1970; 61, 1144, 1971.

[2] А.М.Поляков. Phys. Lett., (в печати) 1975.

[3] T.Skyrme. Proc. Roy. Soc., 262, 237, 1961.

[4] Л.Д.Фадеев. Препринт MPI-PAE/16, 1974.