Письма в ЖЭТФ, том. 22, вып. 11, стр.581 – 583 5 декабря 1975 г.

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ РАСПАДНОГО ФОНОННОГО СПЕКТРА НА ВЯЗКОСТЬ ГЕЛИЯ II

Ю.А.Матвеев, И.М.Халатников

В работе вычисляется коэффициент вязкости фононного газа, имеющего распадный спектр.

Вязкость (также как и другие кинетические явления) в сверхтекучем гелии II при низких температурах (ниже 0,5 К) определяется взаимодействием фононов, т.е. только тех элементарных возбуждений, которые имеются в этом случае. В случае, когда спектр фононов устойчив, распад фононов невозможен и наиболее вероятным является рассеяние фононов фононами (четырехфононный процесс). При этом, если не учитывать дисперсию фононного спектра (т.е. отклонение от линейного закона), то вероятность рассеяния фонона фононом во втором приближении теории возмушений по кубическим ангармоническим членам расходится при малых углах рассеяния. Подробное рассмотрение этого процесса показывает, что он приводит к быстрому установлению равновесия фононов, движущихся в заданном направлении. Однако, такие коллинеарные процессы несущественны для явлений типа вязкости и теплопроводности. Точное же решение кинетического уравнения для задачи о вязкости показывает, что четырехфононные процессы (даже без учета дисперсии) приведут в интеграле столкновений к конечному результату. Соответствуюшее характерное время $1/\tau_4$, характеризующее диффузию неравновесных фононов по углам, и определяет вязкость гелия II. Согласно [1] оно равно:

$$\frac{1}{\tau_4} = \frac{9 \cdot 13!(u+1)^4}{2^{13}(2\pi)^7 \hbar^7 \rho^2 c}\left(\frac{kT}{c}\right)^9, \qquad u = \frac{\rho}{c}\frac{\partial c}{\partial \rho}. \tag{1}$$

При этом коэффициент вязкости оказывается равным

$$\eta_{ph} \approx \frac{1}{5}\rho_{n\,ph}\, c^2 \tau_4 \sim T^{-5}. \tag{2}$$

В настоящее время можно считать, по-видимому, установленным, что при низких давлениях (ниже 15 *атм*) фононная часть энергетического спектра сверхтекучего гелия является распадной [2], т.е.

$$\epsilon = cp(1+\gamma p^2), \text{ где } \gamma > 0. \tag{3}$$

В связи с этим для кинетических явлений становится существенным распад фононов (трехфононный процесс).

Теория развития в [1, 3], позволяет, как мы сейчас покажем, легко вычислить характерное время диффузии фононов по углам благодаря трехфононному процессу. При этом оказывается, что характерное время $1/\tau_3$ имеет ту же температурную зависимость и тот же порядок величины, что и $1/\tau_4$. Естественно, что и коэффициент вязкости η_{ph} будет иметь температурную зависимость, ранее полученную в [1].

Итак, вычислим вязкость фононного газа, имеющего распадный спектр (3). Выбирая систему координат с полярной осью, направленной по вектору макроскопической скорости $\mathbf{u}$, запишем кинетическое уравнение [1]:

$$n_0(n_0+1)\frac{cp}{kT}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\sin\theta\cos\phi = I_3. \qquad (4)$$

Интеграл столкновений I_3 состоит из суммы двух интегралов, описывающих соответственно убыль числа фононов за счет слияния с другими и за счет распада:

$$I_+ = -\frac{c}{(2\pi\hbar)^3}\int d\sigma_+[n_1n_2(n_3+1) - n_3(n_1+1)(n_2+1)]d\mathbf{p}_2,$$

$$(5)$$

$$I_- = -\frac{c}{(2\pi\hbar)^3}\int d\sigma_-[n_1(n_2+1)(n_3+1) - n_3n_2(n_1+1)]d\mathbf{p}_2.$$

Здесь и далее все обозначения общепринятые. Каждый из интегралов I_+ и I_- будучи разложен по малой величине $\gamma\mathbf{p}^2$ ($\mathbf{p}$ – некоторый импульс), или, что тоже самое по малым углам между фононами, пропорционален величине γp^2. Но оказывается, что $I_+ = I_-$ с точностью до γp^2. Поэтому разложение интеграла I_3 начнется с членов порядка $(\gamma p^2)^2$.

Равновесие по энергиям и числу фононов, движущихся в заданном направлении, устанавливает параллельный трехфононный процесс, скорость которого:

$$\frac{1}{\tau_{11}} \approx \frac{(u+1)^2\zeta(2)}{2\pi\hbar^4\rho}x^2\left(\frac{kT}{c}\right)^5 \qquad x = 7-8, \quad \zeta(2) = 1{,}3. \qquad (6)$$

Учитывая симметрию (1), отклонение функции распределения от равновесной будем искать в виде:

$$\delta n = -n_0(n_0+1)(\epsilon\nu P_2(\cos\theta) - p\beta P_2(\cos\theta)), \qquad (7)$$

где $P_2(x)$ – полином Лежандра.

Заметим, что так как ϵ нелинейно зависит от импульса, то коэффициент β нельзя включить в коэффициент ν, как это можно было сделать при линейной дисперсии. Все трехмерные процессы происходят в узком конусе направлений вокруг фонона с заданным импульсом $\mathbf{p}_1$. Поэтому, с нашей точностью, мы можем считать, что азимутальный угол фонона $\mathbf{p}_2$ совпадает с азимутальным углом фонона $\mathbf{p}_1$, т.е. основной вклад в интеграл дают фононы в плоскости импульсов которых лежит вектор $\mathbf{u}$. Это отличается от случая четырехфононных процессов, где азимут ϕ_2 фонона $\mathbf{p}_2$ может быть любым.

Учитывая все сказанное выше, раскладывая I_3 до $(\gamma p^2)^2$ и интегрируя затем (1) по $\epsilon p^2 dp$ и $p^3 dp$, найдем связь между ν и β:

$$\beta = \frac{3}{2} \nu. \tag{8}$$

Тогда (4) перепишется в виде:

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{\tau_3}; \qquad \frac{1}{\tau_3} = b \frac{(u+1)^2 \gamma^2 T^9}{\hbar^4 \rho c^9} \quad b = 0{,}53 \cdot 10^7 \tag{9}$$

Отсюда вязкость:

$$\eta = \frac{2\pi^5}{(15)^3} c \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \frac{\tau_3}{\hbar^3}. \tag{10}$$

Таким образом, температурная зависимость вязкости, с использованным законом дисперсии совпадает с температурной зависимостью четырехфононной вязкости, но численный коэффициент зависит от величины γ 1).

Отношение τ_4/τ_3 содержит буквенный параметр $\hbar^3 \rho \gamma^2 c \ll 1$ и лишь численные множители делают порядок величин времен τ_4 и τ_3 одинаковым. То обстоятельство, что времена релаксации для трехфононных и четырехфононных процессов имеют одинаковый порядок величин и одинаковую температурную зависимость, указывает на то, что роль многофононных процессов заслуживает специального подробного рассмотрения.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 ноября 1975 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 19, 637, 709, 1949.

[2] A.Woods, R.Cowley. Rep. Prog. Phys., 36, 1135, 1973.

[3] И.М.Халатников. Теория сверхтекучести, М., 1971.

[4] D.Benin. Phys. Rev. B11, 145, 1975.

[5] В.Гуревич, Б.Лайхтман. ЖЭТФ, 69, 1230, 1975.

1) Аналогичные результаты были недавно получены в работе [4] приближенными методами и в работе [5], где применен очень громоздкий метод, использующий оператор поперечной релаксации.