

## К ТЕОРИИ СПЕКТРА БОЗЕ-СИСТЕМЫ С КОНДЕНСАТОМ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ИМПУЛЬСОВ

*А.А.Непомнящий, Ю.А.Непомнящий*

Получен результат  $\Sigma_{0,2}(0) = 0$ , устраняющий расходимости при выводе формул для функций Грина бозе-системы с конденсатом в области малых импульсов. Найдено простое сходящееся диаграммное выражение: для  $1/c^2$  ( $c$  – скорость звука). Обсуждаются условия применимости вычислений с использованием малого параметра.

В работе [1] был получен ряд точных соотношений, характеризующих бозе-систему с конденсатом в пределе малых импульсов при  $T = 0$ , в частности

$$G^r(p) = -\hat{G}(p) = \frac{n_0 m c^2}{n(\epsilon^2 - c^2 p^2 + i\delta)}, \quad c^2 = \frac{n}{m} \frac{d\mu}{dn}, \quad p \equiv (p, \epsilon) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Однако уже сами авторы обратили внимание на определенный недостаток их анализа: в промежуточных выкладках он содержит расходящиеся при  $p \rightarrow 0$  выражения, которые лишь на последнем этапе объединяются в величины, имеющие макроскопический смысл. Чтобы избежать расходимостей, авторам пришлось ввести в спектр нефизическую щель  $\Delta$ , которая полагается стремящейся к нулю в окончательных выражениях; при этом, однако, не обоснован переход  $p \rightarrow 0$  до обращения  $\Delta$  в нуль. Вывод формул (1) в работе [1] неудовлетворителен и в другом отношении: он существенно использует предположение  $\Sigma_{0,2}(0) \neq 0$ , которое, как будет показано, неверно.

В настоящей статье в качестве точного результата получено

$$\Sigma_{02}(0) = 0 \quad (2)$$

и предложен вывод формул (1), учитывающий (2) и не содержащий каких-либо расходимостей на промежуточных этапах вычислений. При этом найдено простое диаграммное выражение для  $1/c^2$ , сходимость которого дает микроскопическое обоснование неравенства  $c \neq 0$  (независимое от макроскопического требования конечной сжимаемости). В статье рассмотрен также вопрос об условиях, при которых для бозесистемы с каким-либо малым параметром  $a$  допустимо отбрасывание расходящихся при  $p \rightarrow 0$  диаграмм высших порядков по  $a$ .

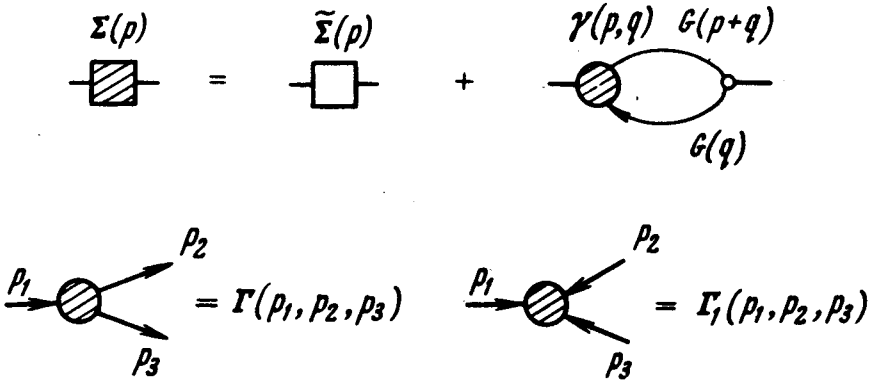


Рис. 1

Запишем точное уравнение для  $\Sigma_{ik}(p)$ , выделив член, расходящийся в приближениях (рис. 1;  $\tilde{\Sigma}(p)$  неприводима по двум линиям частиц). С учетом  $G'(p) = -G(p) = G'(-p) = \hat{G}(-p)$  ( $p \rightarrow 0$ ) находим

$$\gamma(0, 0) = \frac{1}{2} \left[ \Gamma(0, 0, 0) - \Gamma_1(0, 0, 0) \right] = \frac{1}{n_0} \Sigma_{02}(0). \quad (3)$$

При  $p = 0$  подынтегральное выражение в члене с  $\gamma$  (рис. 1) в области малых  $q$  имеет вид

$$i \frac{n_0^2 m^2 c^4}{n^2 (\omega^2 - c^2 q^2 + i\delta)^2} \left[ \frac{1}{n_0} \Sigma_{02}(0) + \tilde{\gamma}(0, q) \right], \quad \tilde{\gamma}(0, 0) = 0, \quad (4)$$

так что для  $\Sigma_{02}(0)$  получаем точное самосогласованное уравнение, единственным конечным решением которого является (2). Соотношение Гунгенгольца – Пайнса [2] принимает, таким образом, вид  $\mu = \Sigma_{11}(0)$ .

Отметим, что (2) не означает  $c = 0$ , как могло бы показаться из сопоставления (1) и (5) [3]

$$G' = -\hat{G} = \Sigma_{02}(0) / B(\epsilon^2 - c^2 p^2 + i\delta) \quad (5)$$

поскольку  $B = 0$ , т. е. (5) содержит неопределенность. Действительно, используя равенства работы [1]

$$\Sigma_{02}(0) = n_0 \left( \frac{\partial^2 E'}{\partial n_0^2} \right)_\mu, \quad \frac{\partial \Sigma_{11}(0)}{\partial \epsilon} = - \left( \frac{\partial n'}{\partial n_0} \right)_\mu \quad (6)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} [\Sigma_{11}(0) - \Sigma_{02}(0)] = 1 = & \frac{\partial^2 E'}{\partial n_0 \partial \mu} + \frac{\partial^2 E'}{\partial n_0^2} \frac{dn_0}{d\mu} = \frac{\partial \Sigma_{11}(0)}{\partial \epsilon} + \\ & + \frac{1}{n_0} \Sigma_{02}(0) \frac{dn_0}{d\mu}. \end{aligned}$$

(прямые производные отвечают физическим изменениям параметров), т. е. с учетом (2)

$$\partial \Sigma_{11}(0) / \partial \epsilon = 1. \quad (7)$$

Подстановка (2), (7) в определение  $B$  [3] дает  $B = 0$ .

Чтобы получить предельный вид функций Грина  $G^*$ ,  $\hat{G}$  ( $p \rightarrow 0$ ) с учетом (2), важно обратить внимание на характер неаналитических членов  $\Delta \Sigma_{ik}$  в разложении  $\Sigma_{ik}(p)$  вблизи  $p = 0$ , связанных диаграмме с  $\gamma(p, q)$  (рис. 1). Существенно, что в низшем порядке по  $p$  неаналитические поправки для  $\Sigma_{11}(p)$  и  $\Sigma_{02}(p)$  совпадают:  $\Delta \Sigma_{11} = \Delta \Sigma_{02} \equiv \Delta \Sigma(p)$ . С учетом  $\gamma(0, 0) = 0$  находим  $\Delta \Sigma(\epsilon^2 = \epsilon_p^2) \sim p^2 \ln p$ ,  $\Delta \Sigma(\epsilon^2 \approx \epsilon_p^2) \sim p(\epsilon \pm \epsilon_p) \ln(\epsilon \pm \epsilon_p)$  (для "голой" вершины  $\gamma^{(o)}(p, q)$  вклады были бы соответственно  $\sim \ln p$  и  $\sim \frac{1}{p} (\epsilon \pm \epsilon_p) \ln(\epsilon \pm \epsilon_p)$ ). Подставляя в точные выражения для  $G^*$ ,  $\hat{G}$  через  $\Sigma_{ik}$  [3] разложения

$$\Sigma_{11}(p) = \mu + \epsilon + \Delta \Sigma(p) + a \epsilon^2 + b p^2 + \dots$$

$$\Sigma_{02}(p) = \Delta \Sigma(p) + a_1 \epsilon^2 + b_1 p^2 + \dots$$

(см. (2), (7)), и учитывая, что  $\Delta \Sigma(p) \gg \epsilon^2, p^2$ , а также [1]

$$a - a_1 = - \frac{1}{2 n_0} \left( \frac{\partial n'}{\partial \mu} \right)_{n_0}, \quad b - b_1 = \frac{n'}{n_0} \frac{1}{2m},$$

получаем (1), причем

$$c^2 = n/m \left( \frac{\partial n'}{\partial \mu} \right)_{n_0}, \quad (8)$$

Поскольку  $(\partial n' / \partial n_0)_\mu = -1$  (6), (7),  $\frac{dn}{d\mu} = \left( \frac{\partial n'}{\partial \mu} \right)_{n_0}$  и (8) согласуется

с (1). Примечательно, что статическая восприимчивость  $F_{44}(\epsilon = 0, p \rightarrow 0) = dn/d\mu$  совпадает с аналогичной характеристикой системы надконденсатных частиц при неизменном числе частиц в конденсате.

Сходимость скелетных диаграмм для  $(\partial n^{\circ} / \partial \mu)_{n^{\circ}}$  (рис. 2) при  $q \rightarrow 0$  следует из равенств  $g_1 - g_2 - g_3 - g_4 = 2 \left\{ 1 - \frac{\partial}{\partial \mu} [\Sigma_{11}(0) - \Sigma_{02}(0)] \right\} =$   
 $= \frac{2}{n_0} \Sigma_{02}(0) \frac{dn_0}{d\mu} = 0$  (см. (1), (6) и (2)).

$$-\left(\frac{\partial n^{\circ}}{\partial \mu}\right)_{n_0} = \text{diagram } g_1 + \text{diagram } g_2 + \text{diagram } g_3 + \text{diagram } g_4$$

Рис. 2

$$\dots + \text{diagram } a + \dots \quad \text{diagram } b \sim \ln p \quad \text{diagram } c \sim 1/p^2$$

Рис. 3

В заключение обсудим вопрос, почему, результат (2) не получается приближенно для моделей с малым параметром  $\alpha$ , например, для разреженной системы в лестничном приближении (рис. 3, *a*). При  $p \rightarrow 0$  многие диаграммы, составленные из боголюбовских или точных функций Грина, расходятся, начиная с простейших, причем наиболее быстро — диаграммы с трехлучевыми вершинами; например, для  $\Sigma_{ik}(p) \sim 1/p^{n-2}$  (рис. 3, *b*). Можно показать, что степень расходимости  $m$  пропорциональна степени малого параметра  $l$  ( $l/m \sim 1$ ), так что в узкой области импульсов  $p_1 \sim \alpha^{l/m} p_0 \ll p_0$  ( $p_0$  — характерный импульс взаимодействия) имеет место компенсация малого параметра. Замена  $\Gamma \rightarrow \Gamma^{(0)}$  в скелетных диаграммах допустима, если получившаяся диаграмма сходится (например,  $F_{33}$  [4]), но необоснована в случае расходимости, даже если взять какую-либо сходящуюся подпоследовательность расходящихся диаграмм ( $\Sigma_{02}$ ,  $F_{44}$ ): область  $p \sim p_1$  остается существенной; здесь следует использовать точную связь с величинами, для которых диаграммы с  $\Gamma^{(0)}$  сходятся (типа  $F_{44}$  с  $F_{33}$  [4]).

Пермский  
государственный университет  
им. А.М.Горького

Поступила в редакцию  
26 сентября 1974 г.

### Литература

- [1] J.Gavoret, P.Nozieres. Ann. of Phys., 28, 349, 1964.
- [2] N.M.Hughenoltz, D.Pines. Phys. Rev., 116, 489, 1959.
- [3] А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.
- [4] S-K.Ma, H.Gould, V.K.Wong. Phys. Rev., A3, 1453, 1971.