Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 1, стр. 13 – 16 *5 января 1975 г.*

СТЕПЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПОТОКАМИ ПО СПЕКТРУ

А.В.Кац, В.М.Конторович, С.С.Моисеев, В.Е.Новиков

Получены точные степенные решения, обращающие в нуль интеграл столкновений кинетического уравнения Больцмана.

Степенные распределения (спектры) частиц встречаются весьма часто. Примером могут служить космические лучи [1]. Существует проблема формирования таких спектров. Так, например, они могут возникать в результате взаимодействия частиц с волнами в турбулентной плазме [2] и т. п.

В данной работе показано, что степенные распределения могут устанавливаться в результате прямого взаимодействия между частицами. Этот класс решений кинетического уравнения Больцмана предполагает существование источника и стока (по энергии) и аналогичен решениям, полученным впервые Захаровым в теории слабой турбулентности для волн [3]. Свойства систем с такими функциями распределения должны существенно отличаться от равновесных.

Найдем решение, обращающее в ноль интеграл столкновений Больцмана:

$$I_{\text{ст}}\{n\} = \int d\tau_p W_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} f_{\mathbf{p}\,\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}, \tag{1}$$

$$W_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} = U_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)\,\delta\,(E+E_1-E_2-E_3), \tag{2}$$

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} = n(\mathbf{p}_2)n(\mathbf{p}_3) - n(\mathbf{p})n(\mathbf{p}_1), \quad d\tau_p = d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3$$
$$E(\mathbf{p}) = E, \quad E(\mathbf{p}_1) = E_1 \text{ и т. д.} \tag{3}$$

Предполагая, что выполняются условия автомодельности и изотропии

$$E(\lambda\mathbf{p}) = \lambda^{\beta}E(\mathbf{p}), \quad U_{\lambda\mathbf{p}\,\lambda\mathbf{p}_1|\lambda\mathbf{p}_2\lambda\mathbf{p}_3} = \lambda^m V_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}, \tag{4}$$

$$E(\hat{g}\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}), \quad U_{\hat{g}\mathbf{p}\,\hat{g}\mathbf{p}_1|\hat{g}\mathbf{p}_2\hat{g}\mathbf{p}_3} = U_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} \tag{5}$$

($\hat{g}$ – операция поворота, частицы могут быть разных сортов, но с тем же показателем однородности β) и используя конформные преобразования симметрии (см. [3, 4] и обзор [5]), применявшиеся ранее к кинетическим уравнениям для волн в теории слабой турбулентности, получим для изотропных решений $n = E^s$ (в случае частиц одного сорта):

$$I_{\text{ст}}\{n\} = \frac{E^{\nu}}{4}\int d\tau_p W_{\mathbf{pp}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}\{E^{-\nu} + E_1^{-\nu} - E_2^{-\nu} - E_3^{-\nu}\} \qquad (6)$$

$$\nu = 2s - 1 + \frac{m + 3d}{\beta} \qquad (7)$$

(d – размерность **р**-пространства). Как видно из (6) и (2) имеются два решения

$n = E^{s_1}(\nu = -1)$ и $n = E^{s_0}(\nu = 0)$ уравнения $I_{\text{ст}}\{n\} = 0$.

$$s_1 = -\frac{m + 3d}{2\beta}, \qquad s_0 = s_1 + \frac{1}{2} \qquad (8)$$

описывающие распределения соответственно с постоянным потоком энергии и числа частиц по спектру.

Для частиц, взаимодействующих по степенному закону $V(r) = r^{-a}$ (кулоновские, ван-дер-ваальсовы силы и т. п.) борновский матричный элемент в уравнении Больцмана зависит от передаваемого импульса $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$

$$U_{\mathbf{pp}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|V(k)|^2, \qquad V(k) = \int d\mathbf{r}\, e^{i\mathbf{kr}} V(r), \qquad (9)$$

откуда $m = 2(a - d)$. В частности при кулоновском взаимодействии ($a = 1$, $m = -4$) возникают распределения с $s_1 = -\frac{5}{4}$, $s_0 = -\frac{3}{4}$. При этом распределение с постоянным потоком энергии ($s = s_1$) является локальным, т. е. интеграл столкновений сходится как на малых, так и на больших импульсах. В таких "колмогоровских" состояниях возрастает затухание Ландау и "убегание" частиц, снижается критерий Лоусона и т. п., т. е. изменяются в сравнении с равновесными те свойства,которые чувствительны к наличию "хвостовых" частиц. В случае плазмы существенна динамическая поляризация среды. Учитывающее это кинетическое уравнение Ленарда – Балеску [6, 7] имеет вид (1), но эффективный матричный элемент в отличие от (9) уже зависит как от передаваемого импульса, так и от передаваемой энергии $\hbar\omega = E_1 - E_3$. В нерелятивистской плазме для взаимодействия частиц a и b имеем:

$$V(\omega, \mathbf{k}) = e_a e_b / k_i k_j \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \qquad (10)$$

где ϵ_{ij} – тензор диэлектрической проницаемости среды с учетом дисперсии [8]. При этом в области статической экранировки $\epsilon \sim (kr_D)^{-2}$ и $m = 0$. При преобладании обмена виртуальными низкочастотными плазмонами $\epsilon \sim -(\omega_p/\omega)^2$ и $m = 4$ (в релятивистском пределе m кратно четырем). Распределения смягчаются в сравнении с кулоновскими. В релятивистской плазме матричный элемент выражается через фурье-компоненту тензора Грина $\hat{G}$ уравнений Максвелла, а кинетическое уравнение Климонтовича – Силина [6, 7] сохраняет вид (1), где

$$V(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi e_a e_b v_i^a v_j^b \hat{G}_{ij}^{ab}(\omega, \mathbf{k})/c^2 \tag{11}$$

($\mathbf{v}$ – скорость частиц), причем в изотропном случае $\hat{G}$ выражается через продольную ϵ^e и поперечную ϵ^{tr} диэлектрические проницаемости, а при $\epsilon^e = \epsilon^{tr} = 1$ приводит к уравнению Беляева – Будкера. В ультрарелятивистской плазме этому взаимодействию соответствуют значения показателя однородности $m = -4$ (кулон), $m = 0$ (дебаевская экранировка) и т. д., причем m кратно двум. Показатель однородности может измениться также в магнитном поле (если оно не столь велико, чтобы нарушить (1) или (5)). Приведем показатели для дифференцированного потока частиц $I(E) = vn_p g(E) \sim E^{-\gamma}$ ($g(E)$ – плотность состояний). В нерелятивистском случае ($\beta = 2$) $\gamma^{\text{нерел}} = -(1 + S)$ в ультрарелятивистском ($\beta = 1$) $\gamma^{\text{рел}} = -(2 + S)$. При $d = 3$ $\gamma_1^{\text{рел}} = \frac{m}{2} + \frac{5}{2}$, $\gamma_0^{\text{рел}} = \frac{m}{2} + 2$. Обращает на себя внимание близость вычисленных спектров с наблюдаемыми для космических лучей.

Найдем теперь малые отклонения от однопотоковых степенных решений (8), обращающие $I_{\text{ст}}$ в нуль [4]:

$$n_0 = E^{s_0}\left[1 + E^{-1}\delta\mu_0 + \frac{\mathbf{p}}{p^2}\delta\mathbf{u}\right], \quad n_1 = E^{s_1}[1 + E\delta\mu_1 + E(\mathbf{p}\delta\mathbf{u})), \tag{12}$$

а также решение с малыми потоками в области "плато" (ср. 4):

$$n_{\mathbf{p}} = 1 + p^{-(m+3d)}\left[E\delta\mu_0 + \delta\mu_1 + E\frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{u}}{p^2}\right]. \tag{13}$$

Здесь $\delta\mu_0$ пропорционально потоку энергии, $\delta\mu_1$ – потоку частиц, а $\delta\mathbf{u}$ – потоку импульса.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
11 октября 1974 г.

Литература

[1] В.Л.Гинзбург, С.И.Сыроватский. Происхождение космических лучей, М., изд. АН СССР, 1963.

[2] С.А.Каплан, В.Н.Цытович. Плазменная астрофизика, М., изд. Наука,1972.

[3] В.Е.Захаров. ПМТФ, **4**, 35, 1965; ЖЭТФ, **51**, 688, 1966; **62**, 1745, 1972.

[4] А.В.Кац, В.М.Конторович. ЖЭТФ, **65**, 206, 1973; Письма в ЖЭТФ, **14**, 392, 1971.

[5] Б.Б.Кадомцев, В.М.Конторович. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, **17**, 511, 1974.

[6] В.П.Силин. Введение в кинетическую теорию газов, М., изд. Наука,1971.

[7] Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, М., изд. МГУ, 1964.

[8] В.Л.Гинзбург, А.А.Рухадзе. Волны в магнитоактивной плазме, М., изд. Наука, 1970.