Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 1, стр. 94 – 96 *5 января 1975 г.*

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ МОНОПОЛЕЙ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

М.И.Монастырский, А.М.Переломов

Приводится простой топологический критерий существования монополей в калибровочно-инвариантных теориях с произвольной компактной группой симметрии G.

Недавно в работах т' Хуфта [1] и Полякова [2] были обнаружены статические решения классических уравнений $SU(2)$ – калибровочно-инвариантной теории поля, описывающие монополи.

Цель нашей статьи – указать простое необходимое условие существования такого типа решений в калибровочно-инвариантных теориях с произвольной компактной группой симметрии G[1]. А именно, таким условием является нетривиальность второй гомотопической группы фактор-пространства G/H: $\pi_2(G/H) \neq 0$. Здесь H—подгруппа в G, зависящая от выбора граничных условий (при $r \to \infty$) для интересующего нас решения.

Рассмотрим систему взаимодействующих векторных (Янг – Миллсовских) полей A^j_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$, $j = 1,\ldots n$, n-размерность G), преобразующихся по присоединенному представлению группы G и скалярных (Хиггсовских) полей ϕ_a $(a = 1, \ldots N)$, преобразующихся по произвольному N-мерному унитарному неприводимому[2] представлению $T(g)$.

Лагранжиан такой системы имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F_{j,\mu\nu} F^{j,\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu \phi_a)(D^\mu \phi^a) - U(\phi), \qquad (1)$$

где

$$F^j_{\mu\nu} = \partial_\mu A^j_\nu - \partial_\nu A^j_\mu + g C^j_{kl} A^k_\mu A^l_\nu,$$
$$D_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a + i g A^j_\mu (T_j)^b_a \phi_b, \qquad (2)$$

C^j_{kl}-структурные постоянные алгебры Ли группы G, T_j —инфинитезимальные операторы представления $T(g)$. Предполагается, что: а)потенциал $U(\phi)$ – G-инвариантная функция полей ϕ_a, б) абсолютный минимум U_0 потенциала $U(\phi)$ достигается лишь при конечных значениях $\phi_a = \chi_a \neq 0$.

Уравнения движения для полей ϕ_a и A^j_μ нетрудно получить варьируя L по ϕ_a и A^j_μ. При этом для вакуумного решения (т. е. решения, отвечающего абсолютному минимуму энергии) $\phi_a(\mathbf{r}) \equiv \chi_a$, $A^j_\mu(\mathbf{r}) \equiv 0$.

---

[1] После окончания работы авторам стало известно, что ряд результатов в этом направлении получен А.С.Шварцем.

[2] Представляют интерес и приводимые представления группы G. Они могут быть рассмотрены тем же способом,

Решение, описывающее монополь, будем искать в классе независящих от времени функций $\phi_a(\mathbf{r})$ и $A^j_\mu(\mathbf{r})$ со следующей асимптотикой при $r \to \infty$

$$\phi_a(\mathbf{r}) \sim \hat{\phi}_a(\mathbf{n}), \qquad A^j_\mu(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r}\hat{A}^j_\mu(\mathbf{n}), \quad \mathbf{r} = r\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \tag{3}$$

причем предположим, что поля $\phi_a(\mathbf{n})$ существенно зависят от $\mathbf{n}$[1]. Заметим, что, в силу уравнений движения $\hat{A}^j_\mu(\mathbf{n})$ полностью определяются функциями $\hat{\phi}_a(\mathbf{n})$. Следуя [2], выберем $\hat{\phi}_a(\mathbf{n})$ в виде

$$\hat{\phi}_a(\mathbf{n}) = \Omega^b_a(\mathbf{n})\,\phi^{(o)}_b, \quad \Omega^b_a(\mathbf{n}) = T^b_a(g(\mathbf{n})), \tag{4}$$

где $\hat{\phi}^{(o)}$ – фиксированный вектор, такой что $U(\hat{\phi}^{(o)}) = U_0$

Из (4) видно, что векторы $\hat{\phi}(\mathbf{n})$ принадлежат определенной орбите представления $T(g)$, т. е. множеству векторов вида $T(g)\,\hat{\phi}^{(o)}$, где g пробегает всю группу G. Известно, что эту орбиту можно рассматривать как фактор-пространство G/H, где H – стационарная подгруппа вектора $\hat{\phi}^{(o)}$, т. е. множество h таких, что $T(h)\hat{\phi}^{(o)} = \hat{\phi}^{(o)}$.

Таким образом граничные условия, задаваемые функциями $\hat{\phi}_a(\mathbf{n})$, определяют отображение двумерной сферы $S^2 = \{\mathbf{n} : \mathbf{n}^2 = 1\}$ в орбиту G/H, $\hat{\phi}: S^2 \to G/H$. Отображение $\hat{\phi}'$, которое можно непрерывно деформировать в $\hat{\phi}$, назовем гомотопным $\hat{\phi}$[2]. Множество классов гомотопных друг другу отображений образует группу $\pi_2(G/H)$. Поскольку при переходе к другой калибровке мы получаем отображение $\hat{\phi}$ гомотопное $\hat{\phi}$, то отсюда следует, что нетривиальность группы $\pi_2(G/H)$ является необходимым условием существования монополей.

Приведем результаты вычислений $\pi_2(G/H)$ в наиболее интересных случаях: а) G – односвязная группа: $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$, $\pi_1(G/H) = 0$; б) $G = \tilde{G}/C$, где $\tilde{G}$ – односвязная группа с конечным центром; C – подгруппа центра $\tilde{G}$:

$$\pi_2(G/H) = \pi_2(\tilde{G}/H) = \pi_1(H), \qquad \pi_1(G/H) = C.$$

Проиллюстрируем эти общие формулы на следующих физических примерах.

1. Пусть $G = SU(2)$, $T(g) = T^I(g)$, I – изотопический спин. а) I – полуцелое; стационарная подгруппа любого вектора $\hat{\phi}^{(o)}$ состоит лишь из единичного элемента. Следовательно $\pi_1(H) = 0$ и решений типа монополей нет. б) I – целое; для вектора $\hat{\phi}^{(o)}$ с нулевой проекцией изоспина на ось t_3, $H = U(1)$, $\pi_1(H) = Z$ (Z – группа целых чисел) и возможные решения типа монополий характеризуются одним целым числом.

2. Пусть $G = SU(3)$, $T(g) = T^{(p,q)}$, p и q целые неотрицательные числа. а) Для представлений $T^{(1,0)}$ размерности 3 при любом выборе ненулевого вектора $\hat{\phi}^{(o)}$ $H = SU(2)$, $\pi_1(H) = 0$ и решений типа моно-

---

[1] Решения такого типа, но только для одних Янг-Миллсовских полей и G-$SU(2)$ рассматривались ранее в работе Янга и Ву [3].

[2] Все топологические понятия, используемые в тексте, содержатся в [4].

полей нет. б) Пусть $T(g) = T^{(1,1)}$ – присоединенное представление $\dim T^{(1,1)} = 8$. Вектор $\hat{\phi}^{(o)}$ в этом случае имеет вид эрмитовой 3×3 матрицы и $\mathrm{Sp}\,\phi^{(o)} = 0$. Если все три собственных значения $\hat{\phi}^{(o)}$ различны, то $H = U(1)\times U(1)$ и $\pi_1(H) = Z + Z$. Такие решения нумеруются двумя целыми числами. Если же два собственных значения совпадают, то $H = U(2)$ и $\pi_1(H) = Z$, т. е. такие решения нумеруются одним целым числом.

3. В модели Вайнберга $G = SU(2)\times U(1)$, а $H = U(1)$ и вложена в G нерегулярно. В этом случае $\pi_2(G/H) = 0$ и решений типа монополей нет.

В заключение заметим, что физический интерес представляют лишь устойчивые решения с конечной энергией. Для нахождения таких решений требуются дополнительные исследования.

Мы благодарны А.И.Вайнштейну, Л.Б.Окуню, А.М. Полякову и А.С.Шварцу за полезные обсуждения.

Институт теоретической и
экспериментальной физики

Поступила в редакцию
27 ноября 1974 г.

Литература

[1] G.t'Hooft. Nucl. Phys., B79, 276, 1974.

[2] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974.

[3] T.T.Wu, C.N.Yang. Properties of matter under unusual conditions, Wiley, N.Y. 1969. p. 349.

[4] Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. М., изд. Мир, 1970.