Письма в ЖЭТФ, том 21, вып 4, стр. 223 – 225 *20 февраля 1975 г.*

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ НА ХАРАКТЕР КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ

В.А.Белинский, И.М.Халатников

Рассмотрен характер решений для однородной анизотропной космологической модели I типа по Бъянки с учетом второй вязкости. Показано, что действие вязкости не способно устранить космологическую сингулярность, в отличие от исследованного ранее фридмановского случая. Рассмотренная в данной работе модель обладает замечательным свойством: вблизи космологической сингулярности гравитационное поле рождает материю в рамках классической (не квантовой) теории.

В недавней работе Г.Мэрфи [1] приведен пример точно решаемой космологической модели Фридмана с учетом второй вязкости, действие которой устраняет космологическую особенность. Мы покажем, что этот эффект неустойчив и исчезает при переходе к анизотропным моделям. В анизотропном случае действие вязкости не способно ликвидировать сингулярность.

Так же, как и в [1], мы ограничимся включением только второй вязкости, коэффициент которой пропорционален плотности энергии (можно показать, что явление первой вязкости не изменит результатов). Рассмотрим однородную космологическую модель первого типа:

$$-ds^2 = -dt^2 + R_1^2(t)\,dx^2 + R_2^2(t)\,dy^2 + R_3^2(t)\,dz^2. \qquad (1)$$

С учетом второй вязкости тензор энергии-импульса есть: $T_{ik} = (\epsilon + p^{*})\,u_i u_k + p^{*} g_{ik}$, где $p^{*} = p - \zeta u^k_{;k}$. Давление p и коэффициент вязкости ζ считаем пропорциональными плотности энергии ϵ:

$$p = (\gamma - 1)\epsilon,\ \zeta = a\epsilon,\ (1 \leqslant \gamma \leqslant 2,\ a \geqslant 0,\ a,\ \gamma = \mathrm{const}). \qquad (2)$$

В сопутствующей системе $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$ $(u^0 u_0 = -1)$ и компоненты T_i^k есть: $T_0^0 = -\epsilon$, $T_\alpha^0 = 0$ $T_\alpha^\beta = p^{*}\delta_\alpha^\beta$. Для дальнейшего удобно обозначить

$$R_1 R_2 R_3 = R^3, \quad (\ln R)^{\cdot} = H \qquad (3)$$

Тогда получаем $p^{*} = \epsilon(\gamma - 1 - 3aH)$. Составляя теперь систему уравнений Эйнштейна, замечаем, что $\alpha\beta$– компоненты этих уравнений допускают два первых интеграла, и в результате полная система уравнений тяготения может быть записана в следующем виде (4– 5)

$$(\ln R_1)^{\cdot} = H + s_1 R^{-3}, \quad (\ln R_2)^{\cdot} = H + s_2 R^{-3}, \quad (\ln R_3)^{\cdot} = H + s_3 R^{-3} \qquad (4)$$

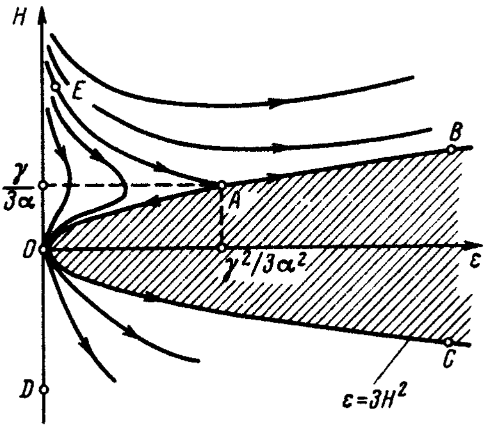
здесь постоянные s_α связаны условием $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Функции же $R(t)$ и $\epsilon(t)$ должны удовлетворять уравнениям:

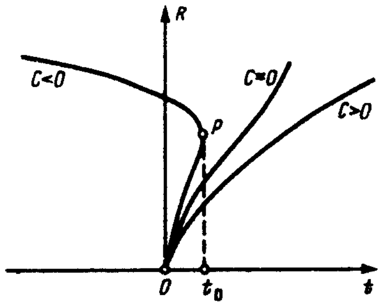
$$\epsilon = 3H^2 - \frac{4s^2}{3} R^{-6}, \quad \dot{\epsilon} = 3\epsilon H(3aH - \gamma), \qquad (5)$$

где $s^2 = 3(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/8$. Характер решений системы (5) легко понять с помощью качественной теории динамических систем, используя фазовую плоскость (H, ϵ). Из (5) следует:

$$\dot H = \epsilon\left(\frac{2-\gamma}{2} + \frac{3a}{2}H\right) - 3H^2, \qquad \dot\epsilon = 3\epsilon H(3aH - \gamma). \tag{6}$$

Система (6) имеет седловую особую точку при $H = \gamma/3a$, $\epsilon = \gamma^2/3a^2$ (Характеристические числа $\lambda_1 = \gamma^2/2a$, $\lambda_2 = -2\gamma/a$). Легко показать, что точное уравнение первой сепаратрисы есть $\epsilon = 3H^2$. Точное уравнение второй сепаратрисы можно указать только в частном случае $\gamma = 2$: это уравнение дается в параметрическом виде формулой (9) при $C = 0$, однако в общем случае при $\gamma \neq 2$ поведение второй сепаратрисы качественно остается таким же. На рис. 1 показана картина поведения интегральных кривых системы (6). Показаны только кривые в физической области $\epsilon \leqslant 3H^2$ (см. (5)). Парабола $\epsilon = 3H^2$ и кривая EA являются сепаратрисами седла A, которые разбивают всю совокупность решений на три класса: 1. В области EAO лежат решения, описывающие эволюцию Вселенной от космологической особенности ($H \to +\infty$, $\epsilon \to 0$) до состояния бесконечного расширения ($H \to 0$, $\epsilon \to 0$). Легко указать асимптотики конечных состояний. При стремлении к точке (0, 0) величина H стремится к нулю как $1/t$ $(t \to +\infty)$ и в уравнениях член с вязкостью пренебрежимо мал. При этом $R \sim t^{2/3\gamma}$ и асимптотически при $t \to +\infty$ мы имеем решение Фридмана.





При $H \to +\infty$ (что соответствует $t \to 0$) вязкий член в уравнениях становится определяющим, и здесь мы имеем асимптотику:

$$R = (2st)^{1/3}, \quad \epsilon = \text{const} \cdot t^{-\gamma} e^{-a/t} \quad (t \to 0) \tag{7}$$

$$(R_1, R_2, R_3) \sim (t^{p_1}, t^{p_2}, t^{p_3}), \tag{8}$$

где показатели $p_a = 1/3 + s_a/2s$ удовлетворяют казнеровским условиям $\Sigma p_a = \Sigma p_a^2 = 1$ [2]. Таким образом, при $t = 0$ эта совокупность решений ограничена казнеровской сингулярностью и пройти по времени на минус-бесконечность (с устранением особенности), как это происходит в решении [1], невозможно. Этот факт понятен из картины интегральных кривых (рис. 1). Решение Мэрфи [1] является сепаратрисой OA ($s = 0$), входящей в неустойчивую седловую точку, и возмушение, включающее анизотропию ($s \neq 0$) уводит траекторию бесконечно далеко.

2. В областях EAB и DOC лежат решения, в которых функция $R(t)$ в некотором промежутке двузначна. Проиллюстрируем все сказанное одним решением, которое можно получить в квадратурах при $\gamma = 2$:

$$H = 2s / 3R^3 \,\mathrm{th}\,(as R^{-3} + C), \quad \epsilon = 4s^2/3R^6 \,\mathrm{sh}^2 (as R^{-3} + C),$$
$$(R^3)^{\cdot} = 2s / \mathrm{tn}\,(as R^{-3} + C) \quad . \tag{9}$$

В зависимости от постоянной C получаем три типа решений, показанных на рис. 2. При $C > 0$ решения соответствуют траекториям, лежащим в области EAO. При $C = 0$ получаем сепаратрису AE. Двузначные решения от начала координат до точки P представлены траекториями в области EAB, а от точки P до бесконечности – траекториями из DOC. Точка P соответствует особенности $H \sim \pm (t_0 - t)^{-1/2}$, $\epsilon \sim (t_0 - t)^{-1}$.

Не представляет труда показать, что в модели IX типа по Бьянки также сохраняется космологическая сингулярность при $t = 0$. При этом плотность энергии ϵ быстро стремится к нулю по закону, близкому к (7), а вместо казнеровской особенности возникает осцилляционный режим [

Обращение в нуль плотности энергии в особой точке при $t = 0$ представляет собой качественно новый элемент в поведении космологического решения. При $t \to 0$ плотность энергии $\epsilon \sim e^{-a/t}$ и экспоненциально мала, затем в процессе расширения плотность энергии возрастает, достигает максимума и в дальнейшем убывает асимптотически при $t \to \infty$ по фридмановскому закону. Таким образом, рассматриваемая в данной работе космологическая модель с вязкостью обладает замечательным свойством: вблизи особенности гравитационное поле рождает материю в рамках классической (не квантовой [3, 4]) теории. Следует, конечно, оговорить, что этот вывод получен для специальной модели, в которой коэффициент второй вязкости был принят пропорциональ ным плотности энергии. Кроме этого, следует также иметь в виду, что учет диссипации с помощью одного коэффициента вязкости справедлив лишь в том случае, когда члены со старшими производными от скорости малы. Можно, однако, надеяться, что кинетические коэффициенты более высокого порядка будут пропорциональны энергии в степени более высокой, чем первая. В этом случае такие члены оказались бы пренебрежимо малыми вблизи особенности, ввиду экспоненциальной малости ϵ при $t \to 0$. Так или иначе рассмотренная модель возможно дает нам идею того, что могло происходить при возникновении и эволюции нашей Вселенной.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР.

Поступила в редакцию
28 декабря 1974 г.

Литература

[1] G.Murphy. Phys. Rev., D 8, 4231, 1973.

[2] В.А.Белинский, Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников. УФН, 102, 463, 1970, Adv. in Phys., 19, 525, 1970.

[3] Я.Б.Зельдович. Сборник к 60-летию Дж. А. Уилера. "Magic without Magic" ed. by Clauder, 1972.

[4] Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский. ЖЭТФ, 61, 2161, 1971.