Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 5, стр. 302 – 305 5 марта 1975 г.

КВАНТОВАНИЕ СОЛИТОНОВ

В.Е.Корепин, П.П.Кулиш, Л.Д.Фаддеев

На примере уравнения "sine-Gordon" обсуждается квазиклассическое квантование частицеподобных решений и вычисляются квантовые поправки при помощи континуального интегрирования.

1.Квазиклассические результаты. Рассмотрим лагранжиан для кирального поля $\chi(x, t) = \exp\{iu(x, t)\}$

$$L = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}[u_t^2 - u_x^2 - 2m^2(1-\cos u)]\,dx; \quad \chi(x, t) \to 1, \quad |x| \to \infty,$$

где m – масса поля, γ – безразмерная константа связи ($\hbar = c = 1$). В [1, 2] описано нелинейное каноническое преобразование от переменных поля $\left\{u(x, t);\ \pi(x, t) = \frac{1}{\gamma}u_t(x, t)\right\}$ к переменным типа действие-угол, которые комбинируются в следующие канонически сопряженные пары: $\{\rho(k);\ \phi(k)\}$, $-\infty < k < \infty$, $0 \leqslant \rho(k) < \infty$, $0 \leqslant \phi(k) \leqslant 2\pi$, $\{p_a;\ q_a\}$, $a = 1, \dots A$, $-\infty \leqslant p_a;\ q_a \leqslant \infty$; $\{\zeta_b;\ \eta_b\}$, $\{a_b;\ \beta_b\}$; $b = 1, \dots B$, $-\infty < \zeta_b;\ \eta_b < \infty$; $0 \leqslant a_b \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \beta_b \leqslant 8\pi/\gamma$, целые положительные числа A, B могут принимать произволные значения. Полная энергия и импульс так выражаются через выписанные переменные:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty}(k^2 + m^2)^{1/2}\rho(k)\,dk + \sum_{a=1}^{A}(p_a^2 + M^2)^{1/2} + \sum_{b=1}^{B}(\eta_b^2 + (2M\sin\nu)^2)^{1/2}$$

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty}k\,\rho(k)\,dk + \sum_{a=1}^{A}p_a + \sum_{b=1}^{B}\eta_b; \quad \nu = \gamma\beta/16; \quad M = 8m/\gamma .$$

При квантовании в квазиклассическом приближении мы можем использовать произвольные канонические переменные, в частности, и только что описанные. В этом приближении можно утверждать, что в системе имеются три сорта частиц с массами: m, M и $2M\sin\nu$. Канонические переменные α, β пробегают компактное фазовое пространство. Опыт теории представлений групп Ли [3] показывает, что такое представление можно проквантовать лишь при условии, что его полная площадь (число состояний) равная в нашем случае $16\pi^2/\gamma$, кратна 2π. Другими словами, константа связи γ квантуется – $\gamma = 8\pi/N$, N – целое, собственные значения ν_n имеют вид $\pi(n+\frac{1}{2})/2N$ и массы частиц третьего сорта равны $2M\sin\left[\pi(n+{}^1/_2)/2N\right]$. Этот парадоксальный результат, отмеченный в [1], находит подтверждение при исследовании квазиклассического выражения для амплитуды рассеяния частиц второго сорта – солитонов. Солитону соответствует решение уравнения движения при $\rho = 0$, $A = 1$, $B = 0$ $u_1(x, t/p, q) = 4\operatorname{arctg}(\exp\{\epsilon m(x - vt - q)/\sqrt{1-v^2}\})$, $v = p(p^2+M^2)^{-1/2}$, ϵ – заряд солитона (см. [1, 2]). Уравнение движения имеет двухсолитонное решение $u_2(x, t)$, распадающееся при $t \to \pm\infty$ на сумму односолитонных с характеристиками [4]

$$q_{1+} = q_{1-} + \frac{M}{(p_1^2+M^2)^{1/2}}\ln\left(1 - \frac{4M^2}{s}\right); \quad q_{2+} = q_{2-} - \frac{M}{(p_2^2+M^2)^{1/2}}\ln\left(1 - \frac{4M^2}{s}\right);$$

$$p_{1+} = p_{1-}\ ; \quad p_{2+} = p_{2-}; \qquad s = (p_{10}+p_{20})^2 - (p_1+p_2)^2.$$

Эти формулы представляют собой каноническое преобразование от *in* к *out* переменным, т. е. задают классическую S-матрицу. Соответствующая производящая функция имеет вид:

$$p_1q_1 + p_2q_2 - H(p_1; p_2),$$

где

$$H(p_1; p_2) = \frac{16}{\gamma}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x}\ \ln\frac{x+1}{x-1} = i\,\frac{8}{j}\int_0^{\pi} d\theta \ln\frac{\xi e^{-i\theta}+1}{\xi + e^{-i\theta}}\quad ;$$

$$\xi = \frac{s - 2M^2 + \sqrt{s(s-4M^2)}}{2M^2}\ .$$

Квантовая S-матрица в квазиклассическом приближении имеет вид $< p_1; p_2 | S | p_1'; p_2' > = \delta(p_1 - p_1')\,\delta(p_2 - p_2')\exp\{-i\epsilon_1\epsilon_2 H\}$ и в зависимости от зарядов частиц получаем две S-функции: $S_\pm = \exp\{\mp iH(p_1; p_2)\}$. Условие кроссинг-инвариантности: $S_\mp(4M^2 - S) = (-1)^c S_\pm(s)$, c – целое, выполняется лишь в случае, если γ квантована указанным выше образом. Выражение $S_\pm(s)$ невещественно в нефизической области $0 \leqslant s \leqslant 4M^2$, что противоречит общим принципам аналитичности. Мы надеемся, что квантовые поправки улучшат ситуацию. Действительно, приближая интеграл интегральными суммами и считая γ квантованным мы получим для S_+ выражение

$$S_+(s) = \exp\left\{\frac{N}{\pi}\int_0^\pi d\theta \ln \frac{\xi e^{-i\theta}+1}{\xi + e^{-i\theta}}\right\} = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{\xi e^{-i\theta_n}+1}{\xi + e^{-i\theta_n}} ;$$

$$\theta_n = \frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right) ,$$

имеющее правильные аналитические свойства и в случае притяжения полюса в точках $S = (2M \sin \nu_n)^2$ – другими словами частицы третьего сорта (двойные солитоны) являются связанными состояниями солитонов.

2. Квантовые поправки. Для их исследования удобно использовать континуальный интеграл. Проиллюстрируем это на примере поправки к массе солитона. Функция Грина $G(p_1; p_2; t_1 - t_2)$, описывающая переход из состояния "солитон с импульсом p_1 при $t = t_1$" в состояние солитон с импульсом p_2 при $t = t_2$" при $T = t_1 - t_2 \to \infty$, дается интегралом

$$\int \prod_{x,t} du\, d\pi \exp\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx(\pi u_t - H[u;\pi])\};$$

$$H[u;\pi] = \frac{\gamma}{2}\pi^2 + \frac{1}{2\gamma}u_x^2 + \frac{1-\cos u}{\gamma} ,$$

где $u = u_1(x, t \mid p_i\, q_i)$ при $t = t_i$, причем предел не зависит от q_1 и q_2. Для подсчета коэффициента F при $\delta(p_1 - p_2)$ удобно интегрировать по подмногообразию с фиксированным полным импульсом. Естественное дополнительное условие, сопряженное со связью $\int \pi u_x dx + p = 0$, имеет вид $X \equiv \int dx\, xH / \int dx H = f(t)$. Общий рецепт [5], показывает, что искомый коэффициент $F[(p^2 + M^2)^{1/2} MT]$ дается интегралом:

$$\int \exp\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx(\pi u_t - H[u;\pi])\} \prod_t \delta(P_1[u;\pi] - p)\delta(X[u;\pi] - f(t)) \times$$

$$\times \prod_{x,t} d\pi\, du.$$

Его достаточно вычислить при $p = f(t) = 0$. Положим $u = u_1(x, t \cdot 10{,}0) + \gamma^{1/2} w(x, t)$, $\pi = \gamma^{-1/2} v(x, t)$ и ограничимся сначала порядками γ^{-1} и γ^{0} (деревья и одна петля). Ответ имеет вид

$$F(T) = \exp\{-iMT\} \exp - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}'\ln\left(\frac{d^2}{dt^2} + D\right) = F_{-1}F_0 ,$$

где $D = -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 - 2m^2/\mathrm{ch}^2 mx$. Tr' означает, что при взятии следа опускается вклад от собственной функции $\psi_0(x)$ оператора D с нулевым собственным значением. Это ограничение порождается связью и дополнительным условием. При $T \to \infty$, используя известные формулы следов [6] для оператора Шредингера, имеем

$$F_0 = \exp\{-i\frac{1}{2}\mathrm{tr}' D^{1/2}T\} = \exp\left\{\frac{iM}{4} - \frac{\gamma}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2k}{k^2+m^2}T\right\},$$

где след tr' берется только в x-пространстве. Возникшая расходимость устраняется той же перенормировкой m, которая устраняет расходимость в обычной теории возмущений в этом приближении [7]. (На совпадение этих перенормировок обратил наше внимание А.М.Поляков). Мы видим, что квантовая поправка в однопетлевом приближении свелась только к перенормировке. Многопетлевые поправки могут дать нетривиальный вклад в массу солитона. Вычисление последних упростится, если использовать трюк Хоофта, заменив в континуальном интеграле $\delta(X - f(t))$ на $\exp\{-i\mu^2 M\int dt\, X^2\}$. Теория возмущений теперь строится с пропагатором $\Delta(x_1 t_1/x_2 t_2)$, таким что $\left(\frac{d^2}{dt_1^2} + D + \mu^2\mathcal{P}\right)\Delta = \delta(x_1 - x_2)\delta(t_1 - t_2)$, где $\mathcal{P}$ – проектор на $\psi_0(x)$, $\Delta(x_1 t_1/x_2 t_2)$ не содержит инфракрасных расходимостей, являющихся препятствием в других подходах к квантованию солитонов [8].

Приведенные вычисления показывают, что квантовые поправки аналитичны по константе связи и квазиклассический ответ является хорошим приближением при малых γ.

Математический институт
им. В.А.Стеклова

Поступила в редакцию
6 января 1975 г.

Литература

[1] Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. УМН, 29, 249, 1974.

[2] В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, 219, 6, 1974; Л.А.Тахтаджян. Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 2, 1974.

[3] А.А.Кириллов. Элементы теории представлений, М., изд. Наука, 1972.

[4] Л.А.Тахтаджян. ЖЭТФ, 66, 476, 1974.

[5] Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 1, 3, 1969.

[6] В.С.Буслаев, Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, 132, 1, 1960.

[7] И.Я.Арефьева, В.Е.Корепин. Письма в ЖЭТФ, 20, 680, 1974.

[8] J.Goldstone, R.Jackiw. Preprint, MIT, 1974.