Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 9, стр. 532 – 535 *5 мая 1975 г.*

ДИНАМИКА КОЛЛАПСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СОЛИТОНОВ

В.В.Горев, Л.И.Рудаков

В работе получены автомодельные решения для коллапса электромагнитных образований, имеющих форму диска для случая $\epsilon \lesssim 0$.

Известно, что характер проникновения электромагнитных волн ($\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2$) малой амплитуды в плазму определяется знаком диэлектрической проницаемости $\epsilon_0 = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$. Если ϵ_0 положительна, то плазма прозрачна для волн данной частоты и глубина проникновения излучения определяется диссипативными процессами. В обратном случае волна проникает в плазму лишь на глубину скин-слоя $\mu^{-1} = c/\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}$. При повышении амплитуды до уровня $W/nT > (\Delta kc/\omega_{pe})^2$ (Δk – ширина спектра) картина усложняется, так как становятся существенными силы радиационного давления $F = -\nabla U$(где $U = ne^2|E|^2/4m\omega^2$ [1]), приводящие к возмущению плотности на величину $\delta n \sim - n_0(W_0/nT)$ и волна может проникать в плазму даже если диэлектрическая проницаемость отрицательна. При этом решение одномерной граничной задачи приводит к выводу, что если (ϵ_0) достаточно мала, то вглубь плазмы распространяются электрозвуковые солитоны [2], т. е. устойчивые локальные минимумы плотности, шириной $\mu^{-1} \sim \delta$, заполненные электромагнитным излучением. В реальных условиях эти солитоны будут ограничены по двум другим пространственным координатам, так что в интересующем нас случае аксиальносимметричного образования (z, R) (ось z направлена вдоль групповой скорости) нужно считать параметр δ/R_0 (R_0 – характерный радиус) конечным. Но трехмерные образования типа солитонов при $W/nT > (\Delta kc/\omega_{pe})^2$ вообще говоря неустойчивы относительно самосжатия, т. е. коллапса [3] (это явление аналогично неустойчивости холодного ленгмюровского газа, открытой в 1964 г. Веденовым и Рудаковым [4] и исследованной в нелинейной стадии Захаровым [5]). Полагая $\delta/R_o \ll 1$ (диск) рассмотрим динамику такого коллапса.

Основная система уравнений в переменных $t \to \omega t$, $x \to \frac{\omega}{c}x$ имеет вид [2]

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \Delta\mathbf{E} + \epsilon_o\mathbf{E} - \delta n\mathbf{E} = 0 & (1) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c_o^2\Delta\right)\delta n = \Delta|E|^2 & (2) \end{cases}$$

где $E^2 \to \dfrac{E^2}{16\pi nT}\,\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, $c_s \to \dfrac{c_s}{c} \equiv c_o$ и в уравнении (1) отброшены малые в нашем случае члены $\partial^2E/\partial t^2$ и $\nabla \mathrm{div}E$. Система (1), (2) имеет следующие дозвуковые частные решения: если $\epsilon_o = 0$ $(\omega^2 = \omega_{pe}^2)$ и $\dfrac{\partial^2\delta n}{\partial t^2} \ll c_o^2\Delta\delta n$ ("адиабатический предел"), то в системе отсчета движущейся вместе с солитоном имеем [6,7]:

$$E = E_o\left(\mathrm{ch}\frac{E_o}{\sqrt{2}}z\right)^{-1}\exp\left[i\frac{E_o^2}{4}t + iS\right], \qquad (3)$$

где S – произвольная фаза.

Если $\epsilon_o < 0$ $(|\epsilon_o| \ll 1)$, то ширина солитона по оси z фиксирована (μ^{-1}). Выбирая $E = E(\sqrt{|\epsilon_o|}(z - Mc_ot))$ (где $M = v_g/c_s$ – число Маха) получаем:

$$E = E_o(\mathrm{ch}\sqrt{|\epsilon_o|}(z - Mc_ot))^{-1}\exp[iMc_o(z - Mc_ot) + iS], \qquad (4)$$

$$2|\epsilon_o| = E_o^2(1 - M^2)^{-1}. \qquad (5)$$

Будем искать решение системы (1), (2) для пространственного образования типа диска в виде (3) или (4), предполагая E_o и S слабоменяющимися функциями R, t $(E'_{oR}/E_o \ll 1)$.

Для случая $\epsilon_o = 0$ подставим решение (3) в систему (1), (2), отделим вещественную и мнимую части и проинтегрируем по z с учетом соотношения $\int_{-\infty}^{+\infty} E_o(\mathrm{ch}\frac{E_o}{\sqrt{2}}z)^{-1}dz = \sqrt{2}\pi$. Получаем простую систему уравнений, состоящую из уравнения непрерывности для E_o и нелинейного уравнения для фазы $S(R, t)$, которая имеет автомодельное решение в переменных $\xi = R/\tau^{1/3}$, $\tau = t_o - t$, (где t_o – время коллапса). В переменных R и t это решение имеет вид

$$\tilde{E}_o(R,t) = \frac{\sqrt{2}}{3(t_o - t)^{2/3}}\left[1 - \frac{R^2}{(t_o - t)^{2/3}}\right]^{1/2}\exp\frac{i}{3(t_o - t)^{1/3}}\left(1 - \frac{R^2}{2(t_o - t)^{2/3}}\right)E_o e^{iS}. \qquad (6)$$

Толщина диска $\delta \sim (t_0 - t)^{2/3}\left(1 - \frac{R^2}{(t_0 - t)^{2/3}}\right)^{-1/2}$, т. к. $E_0 \delta \sim \mathrm{const}$.

Вблизи точки $\xi \gg 1$ решение (6) несправедливо, поскольку $\delta / R_0 \to \infty$ и $\partial E/\partial R$ имеет разрыв. В этой области имеем

$$\widetilde{E}_0 = \frac{1}{R^2}\exp\left(-\frac{i}{3R}\right). \tag{7}$$

Из выражения (7) следует, что доля энергии в области $\xi \gg 1$ мала по сравнению с энергией коллапсирующего образования и можно считать, что область больших ξ не влияет на решение (6). Для случая $\epsilon_0 < 0$ ($|\epsilon_0| << 1$), необходимо ввести новую функцию $\mathcal{E} = E \exp i \frac{\epsilon_0}{2} t / \sqrt{1 - M^2}$, тогда система уравнений для $\mathcal{E}$ будет совпадать по виду с системой уравнений (1, 2) для функции E при $\epsilon_0 = 0$. Ищем решение этой системы в виде $\mathcal{E} = \phi \exp iS$ (где $\phi = E_0(R, t)[\mathrm{ch}\sqrt{|\epsilon_0|} \times (z - Mc_0 t)]^{-1} \exp iMc_0(z - Mc_0 t)$, $S(R,t) = c(R,t) - 2\ln(t_0 - t)$, отделяя вещественную и мнимую части и интегрируя по z с учетом соотношений $\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\mathrm{ch}\sqrt{|\epsilon_0|}\xi)^{-1} d\xi = \pi \frac{E_0}{\sqrt{|\epsilon_0|}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} E_0^3 (\mathrm{ch}\sqrt{|\epsilon_0|}\xi)^{-3} d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{E_0^3}{\sqrt{|\epsilon_0|}}$ получаем относительно простую систему уравнений, имеющую автомодельное решение в переменных $\eta = R/\sqrt{\tau}$, $\tau = t_0 - t$. Если считать, что член $\frac{1}{2E_0} \Delta E_0$ мал в соответствии с условием $E_R''/E << 1$, то решение можно записать в виде

$$\widetilde{E}_0(R,t) = \frac{2}{\sqrt{t_0 - t}}\left[1 - \frac{R^2}{8(t_0 - t)}\right]^{1/2} \exp\left[-i\frac{R^2}{4(t_0 - t)}\right] \equiv E_0 e^{ic}, \tag{8}$$

при $R \gg \sqrt{8(t_0 - t)}$ выражение (8) несправедливо, так как $\partial E/\partial R$ имеет разрыв. В этом случае необходимо учесть ΔE и решать более точные уравнения.

Решение (8) и соотношение (5) показывают, что первоначально плоский диск при $\epsilon_0 < 0$, $|\epsilon_0| << 1$ в процессе коллапса будет деформироваться и превратится в конус с "затупленным острием", повернутым в сторону противоположную движению. Профиль конуса $z(R,t)$ при $t \to t_0$ легко найти. Имеем $z(R \to R_0) \sim R$; $z(R \to 0) \sim \mathrm{const}$. Что касается излучения звука, то выбором начальной амплитуды поля всегда можно сделать время коллапса большим, а следовательно, все ускорения ($\sim c_s / t_0$) малыми. Поэтому реальны условия, когда излучением звука можно пренебречь.

Интересно отметить, что из-за коллапса глубина проникновения электромагнитной волны типа солитона при $\epsilon_0 \leqslant 0$ конечная и не может превысить величину $c_s t_0$, поэтому энергия диссипируется вблизи границы.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
24 марта 1975г.

Литература

[1] Р.З.Сагдеев. Сб. Физика плазмы и проблема УТС. т.3, изд. АН СССР, стр. 346, 1958.

[2] В.И.Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., изд. Наука. 1973.

[3] Е.А.Кузнецов. ЖЭТФ, 66, 2037, 1974.

[4] А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767, 1964.

[5] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.

[6] Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. Препринт ИПМ №35, 1974.

[7] Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 207, 821, 1972.