Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 10, стр. 605 – 607   *20 мая 1975 г.*

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, НАРУШАЮЩИХ УСЛОВИЕ ПРИЧИННОСТИ

Н.А.Воронов

Получены точные решения уравнения Эйнштейна с космологическим членом внутри вращающегося вещества без давления, частными случаями которых являются решения Геделя и ван Стокума.

1.Известно, что некоторые решения уравнения Эйнштейна допускают существование замкнутых времениподобных или изотропных (причинных) кривых [1]. Это противоречит обычным представлениям о причинности, поэтому о таких решениях говорят как о нарушающих причинность. Нарушение причинности называют тривиальным, если его можно избежать изменением только глобальной структуры пространства. В остальных случаях, которые называют нетривиальными, замкнутые причинные кривые не могут быть устранены без изменения локальных свойств пространства.

Первое решение уравнений Эйнштейна (без космологического члена), в котором нетривиальным образом нарушается условие причинности, было получено ван Стокумом [2], рассматривавшего гравитационное поле вращающегося пылевого (без давления) цилиндра. Позднее Гедель [3] построил решение уравнения Эйнштейна с космологическим членом для вращающегося пылевого облака постоянной плотности, также нетривиально нарушающее причинность. Структура решений ван Стокума внутри цилиндра и Геделя удивительно схожа, и это наводит на мысль о возможности существования некоего решения, частными случаями которого являются оба упомянутых пространства. В настоящей статье приводится найденное нами решение уравнения Эйнштейна с космологическим членом, которое является обобщением решений [2, 3].

2.Рассмотрим метрику[1]

$$ds^2 = dt^2 + \left[2C_1^2\left(\int^r d\xi \frac{f_1}{f_2}\right)^2 - f_1^2\right]d\phi^2 + 2\sqrt{2}\,C_1\left(\int^r d\xi \frac{f_1}{f_2}\right)d\phi\,dt - dr^2 - f_2^2 dz^2, \quad (1)$$

[1] Метрика (1) была получена автором при помощи некоторого эвристического приема, о котором он надеется подробно написать в другом месте.

Прямым вычислением можно убедиться, что она удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \rho u_i u_k - \Lambda g_{ik}, \tag{2}$$

где $\rho/8\pi k$ – плотность материи ($\rho \geqslant 0$), u^i – вектор скорости материи, Λ – космологическая постоянная, в системе покоя материи, если выполнены следующие соотношения

$$\frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_2''}{f_2} = 2\Lambda; \quad f_2\left(\frac{1}{2}\rho + \Lambda\right)^{1/2} = C_1, \quad f_1 f_2\left(\Lambda - \frac{1}{2}\rho\right) = (f_1 f_2')' ;$$

$$2\Lambda f_1 f_2 = (f_1' f_2)' , \tag{3}$$

где $f_1 = f_1(r)$, $f_2 = f_2(r)$, C_1 – произвольная постоянная. Рассмотрим сначала пространства с постоянной плотностью, Решение типа Геделя получится, если положить $f_2 = \text{const}$, которую без потери общности можно считать равной единице. Тогда из (3) следует $C_1^2 = \rho$; $\Lambda = \frac{1}{2}\rho$; $f_1 = a\,\text{sh}\sqrt{\rho}(r + r_0)$; a, r_0 – постоянные. Константа интегрирования A в (1) и r_0 определяются из условия $g_{\phi\phi}(0) = g_{t\phi}(0) = 0$: $A = 1$, $r_0 = 0$. Отсюда окончательно имеем

$$ds^2 = dt^2 + a^2(\text{ch}\sqrt{\rho}r - 1)(\text{ch}\sqrt{\rho}r - 3)d\phi^2 + 2\sqrt{2}(\text{ch}\sqrt{\rho}r - 1)d\phi dt - dr^2 - dz^2. \tag{4}$$

Для $\sqrt{\rho} = 2/a$ выражение (4) путем изменения масштаба можно преобразовать к виду, совпадающему с решением Геделя. Другое пространство с постоянной плотностью получается при $C_1 = 0$. Однако в этом случае материя не вращается, и поэтому, согласно Хокингу [4], пространство устойчиво причинно.

3. Пусть $f_2 \neq \text{const}$. Тогда решая систему (3) и требуя при этом, чтобы $g_{\phi\phi}(0) = 0$ и $g_{\phi t}(0) = 0$, получаем

$$ds^2 = dt^2 + C_2^2\left[2C_1^2(\ln Af_2)^2 + C_1^2 \ln Af_2 + \frac{C_3}{A^2}(1 - A^2 f_2^2)\right] d\phi^2 +$$

$$+ 2\sqrt{2}\, C_1 C_2 (\ln Af_2)\, d\phi\, dt - dr^2 - f_2^2\, dz^2 ,$$

где f_2 определяется из уравнения

$$r = \pm \int_0^{f_2} \frac{dy}{\left[\frac{C_3}{A^2}(A^2y^2 - 1) - C_1^2 \ln Ay\right]^{1/2}}; \quad \rho = \frac{2C_1^2}{f_2^2} - 2\Lambda; \quad C_3 = \Lambda; \tag{5}$$

$$f_2(0) = 1/A$$

и C_1, C_2, C_3, A – произвольные постоянные. При $\Lambda = C_3 = 0$ (5) дает нам решение типа ван Стокума. Интеграл (5) можно взять для данного случая, если ввести новую радиальную переменную $\tilde{r}$ по формуле

$$d\tilde{r} = dr / f_2(r) .$$

В результате имеем

$$ds^2 = dt^2 + \frac{C_1^4 C_2^2}{4}\left(\frac{C_1^2}{2}\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2\right)d\phi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} C_1^3 C_2 \tilde{r}^2 d\phi\, dt - \left[\exp - 2\left(\ln A + \frac{C_1^2}{4}\tilde{r}^2\right)\right] \times$$

$$\times (d\tilde{r}^2 + dz^2), \quad \rho = 2C_1^2 \exp 2\left(\ln A + \frac{C_1^2}{4}\tilde{r}^2\right) . \tag{6}$$

Выражение (6) переходит в решение ван Стокума при $A = 1$ и $C_2 = 2/C_1^2$.

4. Пусть теперь $\Lambda \neq 0$. Введем в (5) новую радиальную переменную $\tilde{r}$

$$d\tilde{r} = dr \frac{\left[\frac{\Lambda}{A^2}(A^2 f_2^2 - 1) - C_1^2 \ln A f_2\right]^{1/2}}{f_2 (a \ln A f_2)^{1/2}} , \qquad a = 2\Lambda - C_1^2 A^2 . \tag{7}$$

Тогда решение (5) выглядит следующим образом

$$f_2 = \frac{1}{A} e^{\frac{a\tilde{r}^2}{4}} ; \qquad \rho = 2A^2 C_1^2 e^{-\frac{a\tilde{r}^2}{2}} - 2\Lambda . \tag{8}$$

Рассмотрим прежде всего $a < 0$. Этот случай качественно полностью эквивалентен решению ван Стокума: плотность экспоненциально растет с $\tilde{r}$, замкнутые кривые $\tilde{r}$ = const, z = const, t = const становятся времениподобными, начиная с некоторого $\tilde{r}_1$. Более интересны решения с $a > 0$. В этом случае плотность экспоненциально падает с $\tilde{r}$, поэтому возникает граница вещества $\tilde{r} = \tilde{r}_l$, определяемая из условия $\rho = 0$ и за которой решение (8) теряет физический смысл. Перейдем, наконец, к вопросу о причинности. При $1{,}7 \lesssim C_1^2 A^2/\Lambda < 2$, начиная с некоторого $\tilde{r}_2$, меньшего $\tilde{r}_l$, появляются замкнутые времениподобные кривые. Для $1 < C_1^2 A^2/\Lambda \lesssim 1{,}7$ замкнутые причинные траектории отсутствуют внутри вращающейся пыли.

Автор признателен И.Ю.Кобзареву за многочисленные дискуссии и внимание к работе, В.И.Захарову и А.М.Переломову за полезное обсуждение.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
27 марта 1975 г.

Литература

[1] B.Carter. Phys. Rev., **174**, 1559, 1968.

[2] W.J.van Stockum. Proc. Roy. Soc. Edinb., **57**, 135, 1937. F.J.Tipler. Phys. Rev., **D9**, 2203, 1974.

[3] K.Gödel. Rev. Mod. Phys., **21**, 447, 1949.

[4] S.W.Hawking. Proc. Roy. Soc., **A308**, 433, 1969.