Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 11, стр. 678 – 680 5 июня 1975 г.

КЛАССИЧЕСКИЙ СПИН И АЛГЕБРА ГРАССМАНА

Ф.А.Березин, М.С.Маринов

Сформулирован гамильтонов подход к классической динамике частицы со спином. Аналогом функций на фазовом пространстве в этом случае являются элементы алгебры Грассмана.

В связи с введением в теорию элементарных частиц группы преобразований с антикоммутирующими параметрами [1] и интенсивным обсуждением "суперсимметрии" (см., например, обзор Зумино [2]) возник всеобщий интерес к классическим антикоммутирующим величинам, т. е. к аппарату грассмановой алгебры. По-видимому, первый намек на возможность использования грассмановой алгебры в квантовой механике содержится в работе [3]. Грассманова алгебра оказалась весьма полезной в методе вторичного квантования [4], при этом применялись аналоги таких понятий классического анализа, как дифференцирование и интегрирование. Было найдено также соответствующее обобщение теории групп Ли [5].

Предметом настоящей работы является обобщение классической механики, которое состоит в том, что фазовое пространство содержит как обычные, коммутирующие, так и антикоммутирующие образующие. Это обобщение дало возможность построить классическую гамильтонову механику спина для точечной частицы. Квантование этой механики приводит к обычной квантовой теории Паули – Дирака. Как известно, ранее попытки сформулировать гамильтонову механику для частицы со спином встречались с серьезными трудностями [6], которые до сих пор не преодолены [7].

В нерелятивистской теории будем описывать спин трехмерным вектором ζ_k с антикоммутирующими компонентами

$$\zeta_k \zeta_l + \zeta_l \zeta_k = 0, \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

(в частности, $\zeta_k^2 = 0$). Иными словами, будем считать, что динамические переменные, т. е. функции на фазовом пространстве, являются элементами грассмановой алгебры с тремя образующими, G_3. Введем комплексное сопряжение, т. е. будем рассматривать грассманову алгебру с инволюцией (см. книгу [4], стр. 76) и будем считать ζ_k вещественными. (Напомним, что при инволюции порядок сомножителей меняется на обратный). Пусть классическое действие — четный вещественный элемент G_3. Тогда оно имеет вид

$$A_\zeta = \int_{t_1}^{t_2} [\, i\zeta_k \dot{\zeta}_k - H(\zeta)]dt, \tag{2}$$

где $\dot{\zeta}_k \equiv d\zeta_k/dt$, $H(\zeta)$ – функция Гамильтона. Любой элемент G_3 можно представить как полином степени не выше 3. Поэтому наиболее общий гамильтониан имеет вид $H(\zeta) = i\,\epsilon_{klm}\zeta_k\zeta_l b_m$, где b_m – вещественный вектор, что приводит к уравнениям движения

$$\dot{\zeta}_k = \frac{1}{2i}\ \frac{\partial H}{\partial \zeta_k} = \epsilon_{klm}\zeta_l b_m. \tag{3}$$

Решение этих уравнений описывает прецессию вектора ζ_k и потому система с указанным гамильтонианом интерпретируется как задача о движении спина в магнитном поле.

В соответствии с уравнением (3), определим скобки Пуассона $\{F(\zeta), G(\zeta)\} \equiv (2i)^{-1}(\vec{\partial}_k F)(G\overleftarrow{\partial}_k)$, где $\vec{\partial}_k$ и $\overleftarrow{\partial}_k$ – левая и правая производные по ζ_k. В частности,

$$\{\zeta_k, \zeta_l\} = \frac{1}{2i}\delta_{kl}\ . \tag{4}$$

Вектор связанного со спином углового момента (т. е. генератор группы трехмерных вращений) имеет вид

$$S_k = -\,i\,\epsilon_{klm}\zeta_l\zeta_m, \qquad \{S_k,\ \zeta_l\} = -\,\epsilon_{klm}\zeta_m\ . \tag{5}$$

Фазовое пространство частицы со спином строится путем добавления к обычному шестимерному пространству $(q_k,\ p_k)$ трехмерного грассманова пространства. Полное действие может содержать спин-орбитальное взаимодействие и имеет вид

$$A = \int_{t_1}^{t_2}[\,p_k\dot{q}_k - \frac{1}{2}p_k^2 - V_0(q) + i\zeta_k\dot{\zeta}_k - V_1(q)L_kS_k]\,dt\ , \tag{6}$$

где $L_k = \epsilon_{klm}q_l p_m$ – орбитальный момент, $V_0(q)$ и $V_1(q)$ – потенциальные функции. Очевидно, что формула (6) дает наиболее общий вид локального гамильтониана.

Каноническое квантование производится путем замены фундаментальных скобок Пуассона (4) на антикоммутатор:

$$[\hat{\zeta}_k,\ \hat{\zeta}_l]_+ = \frac{1}{2}\hbar\,\delta_{kl}\ . \tag{7}$$

Таким образом при квантовании алгебра Грассмана переходит в алгебру Клиффорда. Как известно, единственное неприводимое представление алгебры Клиффорда с тремя образующими – двумерно, и мы приходим к двухкомпонентным спинорам. Обозначив $\hat{\zeta}_k = \frac{1}{2}\hbar^{1/2}\sigma_k$, получаем

$$[\sigma_k,\ \sigma_l]_+ = 2\delta_{kl}\,, \quad \hat{S}_k = -\,i\,\epsilon_{klm}\hat{\zeta}_l\hat{\zeta}_m = \frac{1}{2}\hbar\sigma_k\ . \tag{8}$$

Заметим, что в обычном подходе исходным является коммутатор $[\hat{S}_k, \hat{S}_l]_- = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{S}_m$, а простая форма антикоммутатора появляется лишь в представлении со спином 1/2. Здесь логика обратная: постулируется антикоммутатор (7), и потому других представлений, кроме спинорного не возникает.

Каноническая формулировка классической механики спина позволяет также построить квантовую теорию на основе континуального интеграла.

Для построения релятивистской теории необходима грассманова алгебра с пятью образующими $\zeta_0, \zeta_k, \zeta_5$. При этом $\zeta_a = (\zeta_0, \zeta_k)$ образуют 4-мерный аксиальный вектор, а ζ_5 — псевдоскаляр. Как и для бесспиновой частицы, релятивистское действие отвечает вырожденному лагранжиану. Для фиксирования калибровки необходимо дополнительное условие, которое можно выбрать в виде

$$p_a\zeta_a + m\zeta_5 = 0. \tag{9}$$

Квантование приводит к алгебре Клиффорда с пятью образующими, представление которой связано с матрицами Дирака. Связь (9) превращается в обычное уравнение Дирака, $(p\gamma_5 + m\gamma_5)\psi = 0$.

Классическая механика релятивистской точечной частицы со спином 1/2 представляет также интерес в связи с теорией "спиновой струны" [8].

В заключение отметим, что используя грассманово фазовое пространство, можно также ввести внутреннюю симметрию на уровне классической механики. В частности, если считать, что три образующие ζ_k преобразуются как изовектор, то квантование приводит к паре частиц со свойствами изодублета.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
21 апреля 1975 г.

Литература

[1] Ю.А. Гольфанд, Е.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452, 1971.

[2] B.Zumino. In Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, Ed. J.R.Smith, Rutherford Laboratory, Chilton, Didcot, 1974, p. I-254.

[3] D.J.Candlin. Nuovo Cim., 4, 231, 1956.

[4] Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. М., изд. Наука, 1965.

[5] Ф.А.Березин, Г. И.Кац. Матем. сборник, 82, 343, 1970.

[6] Я.И.Френкель. Электродинамика, 1,ОНТИ,М., 1934.

[7] H.J.Hanson, T.Regge. Ann. Phys. (USA), 87, 498, 1974.

[8] Y.Iwasaki, K.Kikkawa. Phys Rev., D8,440, 1973.