Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 2, стр. 53 – 56 *20 июля 1976 г.*

АЛЬФВЕНОВСКИЙ СОЛИТОН

А.Б.Михайловский, В.И.Петвиашвили, А.М.Фридман

Показана возможность образования в плазме альфвеновского солитона.

Современная теория плазмы предсказывает существование магнитозвукового [1], ленгмюровского [2], ионно-звукового [3] и циклотронного [4] солитонов, связанных с соответствующими ветвями колебаний плазмы. Представляет также интерес выяснить возможность существования в плазме солитонов, связанных с другими ветвями колебаний. В частности, в связи с тем, что важную роль в лабораторной и космической плазме играют альфвеновские волны, интересно выяснить вопрос об альфвеновском солитоне. Этому посвящена настоящая статья.

Аналогично тому, как в задаче о ленгмюровском солитоне [2] необходим учет конечного радиуса Дебая, в интересующей нас задаче следует учесть конечный ларморовский радиус (КЛР) ионов. Дисперсионное уравнение для альфвеновских волн с учетом КЛР ионов, согласно [5], имеет вид

$$\epsilon_{\parallel}[1-(\omega/k_z c)^2\epsilon_{\perp}]+(k/k_z)^2\epsilon_{\perp}=0, \qquad (1)$$

где

$$\epsilon_{\parallel}=(k_z d)^{-2}, \qquad \epsilon_{\perp}=[1-I_0(Z_i)\exp(-Z_i)](kd)^{-2}. \qquad (2)$$

Предполагается, что пространственно-временная зависимость возмущенных величин имеет вид $f_1(x, y, z)=f_1(x)\exp(-i\omega t+ik_x x+ik_y y+ik_z z)$; $k_\perp\equiv(k_x^2+k_y^2)^{1/2}\gg k_z$, $d=(T/4\pi n e^2)^{1/2}$ – радиус Дебая; T, n – температура и плотность плазмы; $Z_i=k_\perp^2\rho_i^2$, $\rho_i^2=T/m_i\omega_{Bi}^2$ – квадраг ларморовского радиуса ионов, $\omega_{Bi} = eB/m_i c$ — их циклотронная частота; B — стационарное магнитное поле, ориентированное вдоль оси z; e, m_i — заряд и масса ионов, c — скорость света в вакууме; k_x, k_y, k_z — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$; ω — частота колебаний; I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

При $Z_i << 1$ из (1), (2) следует

$$\omega^2 = \Omega_A^2 \left(1 + \frac{7}{4} Z_i\right) , \tag{3}$$

где $\Omega_A^2 = k_z^2 C_A^2$; $C_A^2 = B^2/4\pi n m_i$ — квадрат скорости Альфвена.

Сравнивая (3) с законом дисперсии ленгмюровских колебаний при $k_z = 0$

$$\omega^2 = \Omega_L^2\left(1 + \frac{3}{2}k_\perp^2 d^2\right), \tag{4}$$

где $\Omega_L^2 = (4\pi e^2 n/m_e)$ — квадрат частоты Ленгмюра, m_e — масса электрона, заключаем, что выяснение существования альфвеновского солитона должно производиться по аналогии с задачей о ленгмюровском солитоне. Иначе говоря, если в случае ленгмюровского солитона [2] вычисляется добавка к величине Ω_L^2, обусловленная изменением плотности плазмы n из-за квадратичных эффектов по амплитуде волны, то в случае альфвеновского солитона следует вычислить соответствующую добавку к Ω_A^2.

Полагая $B = B_0 + \delta B_z$, $n = n_0 + \delta n$, находим (δn, δB_z — величины второго порядка малости по отношению $|f_1/f_0|$, слабо зависящие от координат и времени)

$$\Omega_A^2 = \Omega_{A0}^2 + \delta\Omega_A^2 , \tag{5}$$

где $\Omega_{A0}^2 = k_z^2 C_{A0}^2$, $C_{A0}^2 = B_0^2/4\pi n_0 m_i$ — квадрат скорости Альфвена в нулевом приближении по амплитуде волны,

$$\delta\Omega_A^2 = \Omega_{A0}^2\left(\frac{2\delta B_z}{B_0} - \frac{\delta n}{n_0}\right). \tag{6}$$

Используя условие вмороженности $n/B = \mathrm{const}$, выражаем δn через δB_z

$$\delta n = (n_0/B_0)\delta B_z , \tag{7}$$

так что с учетом (5) и (6) уравнение (3) приводится к виду

$$\omega^2 = \Omega_{A0}^2\left(1 + \frac{7}{4} Z_i + \frac{\delta B_z}{B_0}\right). \tag{8}$$

Величину δB_z находим из уравнения баланса давлений, усредненного по времени

$$\delta P + \frac{\overline{B_\perp^2}}{8\pi} + \frac{B_o \delta B_z}{4\pi} = 0, \tag{9}$$

где δP – возмущенное давление, $\mathbf{B}_\perp$ – возмущение (в первом порядке теории возмущений) поперечного магнитного поля ($\mathbf{B}_\perp \perp z$), черта сверху означает усреднение по времени. Полагаем $\delta P = 2\gamma T \delta n$, где $\gamma = 5/3$ для столкновительной плазмы и $\gamma = 2$ для бесстолкновительной. Тогда с учетом (7) из (9) следует

$$\frac{\delta B_z}{B_o} = - \frac{\overline{B_\perp^2}}{(2+\gamma\beta) B_o^2}, \tag{10}$$

где $\beta = 16\pi n_o T / B_o^2$ – отношение давления плазмы к давлению магнитного поля.

Подставляя (10) в (8), получаем

$$\omega^2 = \Omega_{Ao}^2 \left[1 + \frac{7}{4} Z_i - \frac{\overline{B_\perp^2}}{(2+\gamma\beta) B_o^2}\right]. \tag{11}$$

Алгебраическое уравнение (11) соответствует дифференциальному

$$\omega^2 B_\perp = \Omega_{Ao}^2 \left[1 + \frac{7}{4} \rho_i^2 \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{\overline{B_\perp^2}}{(2+\gamma\beta) B_o^2}\right] B_\perp. \tag{12}$$

Возьмем x-ю компоненту этого уравнения, воспользовавшись вытекающим из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ соотношением $B_y = (i/k_y)\partial B_x/\partial x$, и

обозначим $B_x / \nu B_o \equiv f$, $\nu^2 = 7/4\,(2+\gamma\beta)A^2$, $A^2 = \frac{4}{7}\left(1 + \frac{7}{4} k_y^2 \rho_i^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 C_A^2}\right)$.

Тогда вместо (12) будем иметь

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = f - \left[f^2 + a^2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2\right] f, \tag{13}$$

где $\xi = Ax/\rho_i$.

Интегрируя (13), получаем

$$a^2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - e^{-a^2 f^2}\right) - f^2. \tag{14}$$

В частности при $a << 1$ решение (14) имеет вид гиперболического секанса

$$f \approx \sqrt{2}\,\mathrm{sch}\,\xi \tag{15}$$

и соответствует локализованному по x альфвеновскому возмущению аналогично тому, как это имеет место в случае магнито-звукового и ленгмюровского солитона [1, 2]. Это доказывает возможность существования в плазме альфвеновского солитона.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
20 мая 1976 г.

Литература

[1] Р.З.Сагдеев. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, том IV, стр. 384, изд. АН СССР, М., 1958 г.

[2] Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 207, 821, 1972.

[3] В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов. ЖЭТФ, 66, 595, 1974.

[4] В.И.Петвиашвили. Письма в ЖЭТФ, 23, 682, 1976.

[5] А.Б.Михайловский. Сб. Вопросы теории плазмы, М., Атомиздат, т. 3, стр. 141, 1963 г.