Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 11, стр. 605 – 608 *5 декабря 1976 г.*

ЛИНЕЙНЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ В СВЕРХТЕКУЧЕМ He^3

Г.Е.Воловик, В.П.Минеев

Дается классификация топологически устойчивых особенностей в A- и B-фазах He^3 с учетом спин-орбитального взаимодействия.

Впервые особенности в сверхтекучем He^3 рассматривал де-Жен [1]. Он указал, что в A-фазе He^3 могут быть особенности типа вихревых линий, дисгирации (линейные особенности в поле вектора $\mathbf{l}$, характеризующего направление орбитального момента пары) и особенности в поле вектора $\mathbf{V}$, характеризующего спиновое состояние. К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных исследованию различных особенностей в A- и B-фазах [2 – 4], в том числе особенностей монопольного характера [5 – 7]. В этой работе проводится топологический анализ, позволяющий выяснить: 1) какие типы особенностей являются топологически устойчивыми, т. е. не могут путем непрерывной деформации быть переведены в неособую конфигурацию; 2) какие из них топологически эквивалентны, т. е могут переходить друг в друга путем непрерывной деформации; 3) что происходит при слиянии особенностей. Топологический анализ особенностей, проведенный в [4, 5], некорректен. Наш анализ, основанный на применении так называемых гомотопических групп (см, например, [8]), позволяет поставить в соответствие каждой линейной особенности элемент гомотопической группы π_1, а каждой точечной особенности – элемент гомотопической группы π_2. Таким образом классификация особенностей сводится к нахождению этих групп для данного вида параметра порядка. При этом выполняются следующие правила: 1) если две особенности соответствуют одному и тому же элементу гомотопической группы, то их можно непрерывной деформацией перевести одну в другую; 2) если особенности соответствует единичный элемент гомотопической группы, то она топологически неустойчива; 3) если особенность, характеризуемая элементом a группы, сливается с особенностью, характеризуемой элементом b, то в результате получается особенность, соответствующая элементу $a + b$. То есть слиянию особенностей соответствует групповое сложение элементов гомотопической группы. Поскольку в нашем случае все гомотопические группы абелевы с конечным числом образующих, мы можем каждую особенность характеризовать набором целочисленных индексов.

Параметр порядка в A- и B-фазе имеет вид соответственно

$$A_{ik} = \mathrm{const}\, V_i\, (\Delta'_k + i\Delta''_k), \quad A_{ik} = \mathrm{const}\; e^{i\Phi} R_{ik}(\vec{a}) \,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{V}$, $\vec{\Delta}'$, $\vec{\Delta}''$ – единичные вектора, причем $\vec{\Delta}'\vec{\Delta}'' = 0$, а $\mathbf{l} = [\vec{\Delta}'\vec{\Delta}'']$; Φ – фаза конденсата, R_{ik} – матрица поворота на угол $|\vec{a}| \leqslant \pi$ вокруг оси $\vec{a}$.

Наличие спин-орбитального взаимодействия приводит к тому, что кроме обычной длины когерентности $\xi(T)$ появляется новая длина $R_c \sim \sim 10^2 - 10^3 \xi(T)$ (см. [9]), на которой спин-орбитальное взаимодействие сравнивается с градиентной энергией. Поэтому классификация особенностей зависит от размеров исследуемой области. Если один из характерных размеров области $\xi << r \lesssim R_c$, то в этой области можно пренебречь спин-орбитальным взаимодействием. В областях с размерами, превышающими R_c, спин-орбитальное взаимодействие меняет структуру параметра порядка, фиксируя угол поворота $|\vec{a}| \approx 104°$ в B-фазе и ориентируя $\mathbf{V} \parallel \mathbf{l}$ в A-фазе, и тем самым меняет типы осо- RT

Перечислим теперь типы особенностей с кратким указанием того, элементам каких гомотопических групп они соответствуют.

I. *B-фаза при* $r \lesssim R_c$. Точечных особенностей нет. Линейные особенности следующие (для описания линейных особенностей будем пользоваться цилиндрической системой координат z, ρ, ϕ с осью z вдоль особой линии, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$): 1) Вихри с N квантами циркуляции $\Phi(\mathbf{r}) = N\phi$, где N – произвольное целое число. Они полностью аналогичны вихрям в He II. При слиянии вихрей, как и в He II, происходит сложение квантов циркуляции. 2) Линейные особенности в поле R_{ik}, характеризуемые целочисленным индексом m, который может принимать значение 0 и 1. Причем $m = 0$ соответствует отсутствию особенности. При слиянии двух особенностей с $m = 1$ происходит сложение индексов по модулю 2, т. е. $1 + 1 = 0$, и получается неособая конфигурация. Аналогичная ситуация имеет место в нематических жидких кристаллах, где имеется лишь один тип топологически устойчивых особенностей (с индексом Франка $m = 1$), остальные можно перевести либо в этот тип особенностей, либо в неособую конфигурацию (см. [10]). Особое решение с $m = 1$ имеет вид $\vec{a}(\mathbf{r}) = (\phi - \pi)\hat{\mathbf{z}}$.

Данная выше классификация есть следствие того, что область изменения параметра порядка в B-фазе $R = S^1 \times SO_3$. Гомотопические группы для этого многообразия $\pi_1(R) = Z + Z_2$, $\pi_2(R) = 0$ (последнее означает, что π_2 – тривиальна; Z – группа целых чисел, Z_2 – группа вычетов по модулю 2)

II. *B-фаза при* $r >> R_c$. (Здесь $R = S^1 \times S^2$, $\pi_1(R) = Z$, $\pi_2(R) = Z$). Имеются: 1) вихри $\Phi(\mathbf{r}) = N\phi$, рассмотренные выше; 2) точечные особенности в поле вектора $\vec{\omega} = \vec{a}/|\vec{a}|$. Эти особенности характеризуются целочисленным инвариантом

$$N = \frac{1}{8\pi} \int dS_i \, e_{ijk}\left(\vec{\omega}\left[\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_j}\;\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_k}\right]\right), \tag{2}$$

где интегрирование проводится по поверхности, окружающей особую точку (N является степенью отображения этой поверхности на сферу $|\vec{\omega}| = 1$ и пробегает все целые числа). При слиянии особенностей инварианты складываются. Особенность с $N = 1$ представляет собой еж $\vec{\omega} = \hat{\mathbf{r}}$ (где r, θ, ϕ – сферические координаты). Радиус кора ежа имеет порядок R_c, поле $\vec{a}(\mathbf{r})$ вблизи ежа имеет вид $\vec{a} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, где $f(r) \to \to 104°$ при $r >> R_c$ и $f \to 0$ при $r \to 0$.

III. *A-фаза при* $r \lesssim R_c$. (Здесь $R = (S^2 \times SO_3)/Z_2$, $\pi_1(R) = Z_4$, $\pi_2(R) = Z$). Имеются: 1) Особые точки, характеризуемые целочисленным инвариантом (2), в котором $\vec{\omega}$ надо заменить на $\mathbf{V}$. Эти особые точки аналогичны особым точкам в нематических жидких кристаллах (роль ди-

ректора играет V). Так же, как и в нематиках особые точки с $N = \pm|N|$ не различимы; однако, если особых точек несколько, каждая из них характеризуется определенным знаком с точностью до общего знака.
2) Три типа особых линий, характеризуемые индексом m, который принимает значения 0, 1, 2, 3. При слиянии этих линий происходит сложение индексов по модулю 4. Особая линия с $m = 1$ представляет собой вихрь с квантом циркуляции 1/2, на который наложена дисклинация вектора V с единичным индексом Франка ($\vec{\Delta}' + i\vec{\Delta}'' = e^{i\phi/2}(\hat{x} + i\hat{y})$, $V = \hat{x}\cos\phi/2 - \hat{y}\sin\phi/2$). Особая линия с $m = 3$ отличается от $m = 1$ лишь тем, что квант циркуляции равен $-1/2$. Особые линии с $m = 2$ представляют собой либо вихрь с единичной циркуляцией ($V = \mathrm{const}$, $\vec{\Delta}' + i\vec{\Delta}'' = e^{i\phi}(\hat{x} + i\hat{y})$), либо дисгирацию, например ($V = \mathrm{const}$, $l = \pm\hat{\rho}$, $\vec{\Delta}' = \hat{\phi}$, $\vec{\Delta}'' = \pm\hat{z}$), последняя обладает минимальной энергией среди всех особенностей этого типа. Заметим, что вихрь с двумя квантами циркуляции в силу того, что $2 + 2 = 0$, непрерывно переходит в неособую конфигурацию.

IV. *А-фаза при* $r \gg R_c$. (Здесь $R = SO_3$; $\pi_1(R) = Z_2$, $\pi_2(R) = 0$). Точечных особенностей нет. Линейные особенности можно характеризовать тем же индексом m, что и в III, только теперь он принимает значения 0 и 2. Среди особых линий с $m = 2$ минимальной энергией обладает вихрь с единичной циркуляцией. При $\rho \lesssim R_c$ он переходит в дисгирацию или в две особенности с $m = 1$ (или $m = 3$), находящихся на расстоянии $\sim R_c$, друг от друга.

Теперь несколько слов о монополях (или вортонах, как их назвали в [5]). В отличие от утверждения, высказанного в [5], для вортонов не имеется топологического инварианта, поэтому их существование и устойчивость зависят от возможного потенциального барьера, возникающего при переводе их в другую конфигурацию. Можно показать, что при $r \lesssim R_c$ в A-фазе вортон, вместе с двумя вихрями, исходящими из него, принадлежит типу особых линий с $m = 2$ и может релаксировать без барьера в устойчивую дисгирацию с $l = \hat{\rho}$. Однако в этой области имеется устойчивая точечная особенность ($V = \mathrm{const}$, $l = \hat{\theta}$, $\vec{\Delta}' = \hat{\phi}$, $\vec{\Delta}'' = \hat{r}$ – орты сферической системы координат), соединяющая дисгирацию с $l = \hat{\rho}$ и дисгирацию с $l = -\hat{\rho}$. Эта особенность также принадлежит типу $m = 2$, но не может релаксировать в устойчивую дисгирацию без барьера. В области $r \gg R_c$ эта особенность перестает быть устойчивой.

В заключение мы выражаем благодарность за ценные консультации О.И.Богоявленскому и С.П.Новикову. Мы также благодарны Э.И.Рашбе за благожелательную критику, касающуюся изложения работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 октября 1976 г.
После переработки
10 ноября 1976 г.

Литература

[1] P.G. de Gennes. Phys. Lett., 44A, 271, 1973.

[2] V.Ambegaokar, P.G. de Gennes. D.Rainer. Phys. Rev., A9, 2676, 1974.

[3] F.Fishman, I.A. Privorotskii. Jorn. Low. Temp. Phys., 25, 225, 1976.

[4] В.Р.Чечеткин. ЖЭТФ, 71, 1463, 1976.

[5] S.Blaha. Phys. Rev. Lett., 36, 874, 1976.

[6] Г.Е.Воловик, В.П.Минеев. Письма в ЖЭТФ, 23, 647, 1976.

[7] C.R.Hu, P.Kumar, K.Maki. Preprint, 1976.

[8] Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. М., изд. Мир, 1970.

[9] A.J.Leggett. Rev. Mod. Phys., 47, 331, 1975.

[10] С.И.Анисимов, И.Е.Дзялошинский. ЖЭТФ, 63, 1460, 1972.