*Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 3, стр. 141 – 145 5 февраля 1976 г.*

# РОЖДЕНИЕ ГРАВИТОНОВ ВО ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

*Б.В.Вайнер, П.Д.Насельский*

В работе показано, что при учете обратного влияния энергии длинноволновых потенциальных и вихревых возбуждений на ход космологического расширения в модели однородной изотропной Вселенной, возможно рождение гравитонов вблизи сингулярности.

Процессы рождения гравитонов и других частиц вблизи сингулярности были исследованы в работах [1 – 3]. Авторами было показано, что в однородной изотропной модели Вселенной, заполненной ультрарелятивистской материей с уравнением состояния $p = {}^1/_3\epsilon$ рождение гравитонов отсутствует. Однако в такой системе могут иметь место возбуждения скалярного, векторного и тензорного типов, энергия которых изменяет ход космологического расширения [4]. Действительно, уравнения теории тяготения, учитывающие влияние энергии возбуждений на поведение сглаженных по объему усреднения $V^{(3)}$ фоновых величин имеют следующий вид:

$$\bar{R}_i^p < G_p^k > - \frac{1}{2}\delta_i^k \bar{R}_e^m < G_m^e > = \kappa \bar{T}_i^p < G_p^k > + \kappa < G_p^k \tau_i^p > - < \mathcal{P}_i^p G_p^k > + \frac{1}{2}\delta_i^k < \mathcal{P}_e^m G_m^e > , \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_i^p G_p^k - < \mathcal{P}_i^p G_p^k > + \bar{R}_i^p (G_p^k - < G_p^k >) - \frac{1}{2}\delta_i^k \{ \mathcal{P}_e^m G_m^e - < \mathcal{P}_e^m G_m^e > +$$
$$+ \bar{R}_e^m (G_m^e - < G_m^e >) \} = \kappa \{ G_p^k \tau_i^p - < G_p^k \tau_i^p > + \bar{T}_i^p (G_p^k - < G_p^k >) \}, \tag{2}$$

$$\mathcal{P}_i^k = \frac{1}{2} G_s^e (h_i^{s;k}{}_{;e} + h^{sk}{}_{;i,e} - h_i^{k;s}{}_{;e} - h^s_{e;i}{}^{;k}) + \frac{1}{4} G_p^e G_s^m \{ (h^p_{e;m} - 2 h^p_{m;e}) \times$$
$$\times (h_i^{s;k} + h^{sk}{}_{;i} - h_i^{k;s}) + (h_m^{p;k} + h_m^{k;p} - h^{kp}{}_{;m})(h^s_{i;e} + h^s_{e;i} - h_{ie}{}^{;s}) \}. \tag{3}$$

Отметим, что при получении (1) – (3) использовались следующие соотношения:

$$\mathcal{G}_{ik}(x^e) = \bar{\mathcal{G}}_{ik}(x^\circ) + h_{ik}(x^e),$$

$$G_i^p(\delta_k^i + h_k^i) = \delta_k^p, \tag{4}$$

$$\bar{T}_i^e = (\bar{p} + \bar{\epsilon})\,\bar{u}_i\,\bar{u}^e - \delta_i^e\bar{p},$$

$$\tau_i^e = (\bar{p} + \bar{\epsilon})(\bar{u}_i\,\delta u^2 + \bar{u}^e\delta\bar{u}_i + \delta u_i\,\delta u^e) + (\delta p + \delta\epsilon)(\bar{u}_i\,\bar{u}^e + \delta u_i\,\delta u^e + \bar{u}_i\,\delta u^e + \bar{u}^e\delta u_i) - \delta_i^e\delta p - h_i^e\,\bar{p} - h_i^e\,\delta p \qquad (i, k, e = 0,1,2,3),$$

где $\bar{p}$, $\bar{\epsilon}$ – давление и плотность энергии материи ($\bar{p} = {}^1/_3\bar{\epsilon}$).

$$\epsilon_{tot} = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon, \qquad p_{tot} = \bar{p} + \delta p$$

$\bar{R}_i^k$ – тензор Риччи, определенный на $\bar{\mathcal{G}}_{ik}(x^\circ)$.

В отличие от [4] система (1) – (3) получена из уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ik}R = \kappa T_{ik}$$

усреднением по трехмерному объему $V^{(3)}$, причем операция усреднения определена в виде

$$< f > = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}\;V^{(3)}}\int f(\bar{\mathrm{x}}, x^\circ)\sqrt{-\gamma}\,dV^{(3)}; \quad \gamma = \det\|\mathcal{G}_{\alpha\beta}\|; \alpha,\beta = 1,2,3 \tag{5}$$

с сохранением требования: $<\delta\epsilon> = <\delta p> = <\delta u_i> = <h_{ik}> = 0$.
Естественно, что возможность усредненного описания системы имеет место, когда

$$\lambda_T^2 << \frac{1}{\bar{R}^{(3)}},$$

где $\lambda_T$ – характерная длина волны возбуждений, $\bar{R}^{(3)}$ – кривизна трехмерного пространства. Для однородной изотропной космологической модели, интервал которой представим в виде $ds^2 = a^2(\xi)(d\xi^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$ приведем решение (1) – (3) для масштабного фактора $a(\xi)$

$$a^2(\xi) = R_\circ^2(\xi^2 - c_T^2),$$

где $R_\circ^2$ – параметр модели ($10^{50}$ $см^2$), $c_T$=const определяется заданием амплитуды соответствующего сорта возбуждений (потенциальных, вихревых). Из (6) видно, что четырехмерный инвариант кривизны $\bar{R}$, который в динамическом случае тождественно равен нулю, теперь определяется уровнем $c_T^2$ потенциальной или вихревой "турбулентности".

$$\bar{R} = -\frac{6c_T^2}{R_\circ^2(\xi^2 - c_T^2)^3}. \tag{6}$$

Воспользовавшись классификацией Лифшица [5] для тензорных возмущений метрики, рассмотрим их эволюцию на фоне, искаженном другими сортами возбуждений. Для этого представим $h_a^\beta$ в виде

$$h_a^\beta(x^e) = G_a^\beta \frac{f_{\mathbf{k}}(\xi)}{a(\xi)} e^{i\mathbf{kr}} + \text{к.с.},$$

где $f_{\mathbf{k}}(\xi)$ есть решение уравнения

$$f_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a^2\bar{R}}{6}\right) f_{\mathbf{k}} = 0; \qquad f_{\mathbf{k}}' = \frac{d}{d\xi} f_{\mathbf{k}} \quad . \tag{7}$$

В случае, когда $c_T = 0$, т. е. во Вселенной, заполненной материей с $p = {}^1/_3\epsilon$, уравнение (7) описывает распространение адиабатических гравитонов и согласно [2] эффект их рождения отсутствует. Однако, при $c_T$ отличном от нуля, число гравитонов уже не является адиабатическим инвариантом и можно рассмотреть процесс рождения гравитонов, аналогично тому, как это предложено в [1].

Действительно, решение уравнения (7) следует искать в виде

$$f_{\mathbf{k}}(\xi) = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}(\xi)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega\xi} + \frac{\beta_{\mathbf{k}}(\xi)}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega\xi}, \qquad \omega = |\mathbf{k}| .$$

С учетом дополнительного условия на $\alpha_{\mathbf{k}}$ и $\beta_{\mathbf{k}}$

$$f_{\mathbf{k}}'(\xi) = -i\omega\left(\frac{\alpha_{\mathbf{k}}(\xi)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega\xi} - \frac{\beta_{\mathbf{k}}(\xi)}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega\xi}\right)$$

окончательная система уравнений принимает вид

$$\alpha_{\mathbf{k}}'(\xi) = \frac{i}{2\omega} \frac{c_T^2}{(\xi^2 - c_T^2)^2}\left(e^{2i\omega\xi} \beta_{\mathbf{k}}(\xi) + \alpha_{\mathbf{k}}(\xi)\right),$$

$$\beta_{\mathbf{k}}'(\xi) = -\frac{i}{2\omega} \frac{c_T^2}{(\xi^2 - c_T^2)^2}\left(e^{-2i\omega\xi} \alpha_{\mathbf{k}}(\xi) + \beta_{\mathbf{k}}(\xi)\right).$$

Она имеет точный интеграл

$$|\alpha_{\mathbf{k}}(\xi)|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}(\xi)|^2 = \text{const} .$$

Полагая в начальный момент времени $\xi = \xi_0$, $\alpha_{\mathbf{k}} = 1$, $\beta_{\mathbf{k}} = 0$ и решая ее методом последовательных приближений, получим

$$\beta_{\mathbf{k}}(\xi) = -\frac{i}{2\omega} c_T^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{-2i\omega\xi}}{(\xi^2 - c_T^2)^2} d\xi . \tag{8}$$

Найденное решение, согласно [1], описывает рождение гравитонов в меняющейся метрике. Как видно, основной вклад в (8) дает область $\xi \approx c_T$, а при $\xi >> c_T$ эффект рождения становится пренебрежимо мал. Поскольку рождение гравитонов в некотором смысле аналогично процессу рождения частиц в переменном электромагнитном поле, приведем (7) к виду, обычно используемому в квантовой электродинамике:

$$f_{\mathbf{k}}(\xi) = f_{\mathbf{k}}^{(o)}(\xi) - \frac{1}{6}\int\limits_{\xi_o}^{\xi} G_{\mathbf{k}}(\xi - \xi')\bar{R}(\xi')a^2(\xi')f_{\mathbf{k}}(\xi')d\xi', \qquad (9)$$

где $G_{\mathbf{k}}(\xi - \xi')$ есть функция Грина уравнения (7) при $\bar{R} = 0$, Решая (9) методом теории возмущений и ограничиваясь членами первого порядка по $c_T^2$, получим

$$f_{\mathbf{k}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2k}}c_{\mathbf{k}}e^{-ik\xi} + \frac{1}{\sqrt{2k}}c_{\mathbf{k}}^{+}e^{ik\xi} + \frac{c_T^2}{4ik}\int\limits_{\xi_o}^{\xi}\frac{c_{\mathbf{k}}^{+}e^{-ik\xi+2ik\xi'} - c_{\mathbf{k}}e^{ik\xi-2ik\xi'}}{(\xi'^2 - c_T^2)^2}d\xi' \qquad (10)$$

Из (10) следует, что если в начальный момент времени $\xi = \xi_o$ обратная волна отсутствует, то в последующие моменты $\xi > \xi_o$ она возникает. Используя тот факт, что основной вклад дает область $\xi \approx c_T$ решение можно представить в виде

$$f_{\mathbf{k}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\left(c_{\mathbf{k}} + \frac{c_{\mathbf{k}}^{+}}{4ik}I(k)\right)e^{-ik\xi} + \frac{1}{\sqrt{2k}}\left(c_{\mathbf{k}}^{+} - \frac{c_{\mathbf{k}}}{4ik}I(-k)\right)e^{ik\xi},$$

где $I(k) = c_T^2\int\limits_{\xi_o}^{\infty}\frac{e^{-2ik\xi'}}{(\xi'^2 - c_T^2)^2}d\xi'$.

Определяя обычным способом плотность числа частиц в $K$-ом состоянии, и используя коммутационные соотношения для бозонов

$$[c_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}^{+}]_{-} = 1$$

получим:

$$n_{\mathbf{k}}(\infty) = n_{\mathbf{k}}(\xi_o) + \frac{I^2(k)}{16k^2}(1 + n_{\mathbf{k}}(\xi_o)). \qquad (11)$$

Последний член в (11) и описывает рождение гравитонов на искаженной метрике. Следует отметить, что энергия гравитонов, родившихся за время $\xi \approx c_T$ может существенно превысить энергию возмущений и искажением хода расширения можно будет пренебречь. Естественно при этом рождение гравитонов прекратится. Однако, можно предположить, что рождение гравитонов приведет к генерации потенциальных и вихревых возмущений, которые в свою очередь повлияют на ход расширения.

Авторы благодарны Л.С.Марочнику, Н.В. Пёлихову, А.М.Крымскому за полезное обсуждение работы.

Ростовский
государственный университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1975 г.

## Литература


[1] Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский. ЖЭТФ, 61, 2161, 1971.

[2] Л.П.Грищук. ЖЭТФ, 67, 825, 1974.

[3] Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция Вселенной, М., изд. Наука, 1975, стр. 704.

[4] Л.С.Марочник, Н.В.Пелихов, Г.М.Верешков. Astrophys. Space Sci., 34, 233, 1975.

[5] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, 16, 587, 1946.