

СТАТИСТИКА ВИХРЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГЕЛИИ

В.К.Ткаченко

Статистическая механика двумерной системы вихрей (отрицательные температуры) позволяет объяснить наблюдаемое ранее автором закручивание поплавок во вращающемся гелии в обратную сторону. Решена задача о статистическом распределении вихрей одного знака в круговом цилиндре.

Основы статистической механики двумерной системы вихрей в ограниченном сосуде были заложены Онзагером [1] в 1949 г. Он показал, что для такой системы имеют смысл отрицательные температуры. Действительно, система вихрей – гамильтонова система и ее фазовый объем конечен. При стремлении энергии взаимодействия вихрей $E \rightarrow \pm \infty$ ее фазовый объем стремится к нулю. Значит при некотором E_0 фазовый объем максимален, а это и означает, что при $E > E_0$ система находится в состоянии с отрицательной температурой.

В 1970 г. системы вихрей привлекли внимание специалистов по теории плазмы [2], поскольку двумерная плазма в сильном магнитном поле описывается теми же уравнениями. И вскоре появился нетривиальный результат, а именно: система вихрей положительной и отрицательной циркуляции при отрицательной температуре стремится распадаться на два облака, одно из вихрей положительной циркуляции, другое из вихрей отрицательной циркуляции [3, 4]. Качественно этот результат следует из того, что при отрицательной температуре система стремится занять состояние с наибольшей энергией, а таким состоянием и являются два описанных облака. В работе [5] сообщалось о закручивании поплавок во вращающемся гелии в обратную сторону. Этот результат может быть объяснен как раз на основании изложенных соображений. Динамика гелия может развиваться, например, следующим образом. В начале вращения в жидкости возникает тейлоровская неустойчивость, т. е. вдоль стенки вращающегося цилиндра возникают макроскопические вихри, состоящие из множества элементарных. Плоскости этих вихрей перпендикулярны оси вращения, а знаки чередуются. Энергия взаимодействия элементарных вихрей велика, а значит температура отрицательна. Под влиянием нормальной компоненты вихри постепенно выстраиваются вдоль оси вращения, сохраняя отрицательную температуру. Происходит конденсация вихрей отрицательной циркуляции в облако в центре сосуда и поплавок закручивается в обратную сторону. Нерегулярность в воспроизводимости эффекта свидетельствует, что от описанной картины возможны отклонения.

В работе [5] в ряде случаев наблюдалось квазистационарное вращение поплавок со скоростью, в несколько раз меньшей угловой скорости вращения сосуда. Такое неравномерное вращение жидкости также может быть описано статистически.

Рассмотрим следующую задачу. В круговом цилиндре радиуса R имеется N вихрей положительной циркуляции. Нужно найти их статистически рав-

новесное распределение. Будем предполагать, что это распределение осесимметрично. Обозначим через $n(r)$ плотность вихрей, где r — расстояние от оси. Тогда для энтропии с точностью до константы имеем

$$S = -2\pi \int_0^R n \ln nr \, dr.$$

Система вихрей в цилиндре допускает два первых

интеграла — энергию E и момент количества движения M . Если описы-

вать движение жидкости макроскопически, то $E = \pi\rho \int_0^R v^2 r \, dr$, $M =$

$= \pi\Gamma\rho \int_0^R (R^2 - r^2)nr \, dr$. Здесь скорость $v(r) = \frac{\Gamma}{r} \int_0^r nr \, dr$, Γ — циркуляция

скорости вокруг вихря, ρ — плотность жидкости. Нам нужно найти такое распределение плотности вихрей $n(r)$, чтобы энтропия S была максимальной при заданных N , E и M . Для этого достаточно найти экстре-

мум величины $S + \frac{\mu}{T}N - \frac{E}{T} + \frac{\Omega M}{T}$, где μ/T , $1/T$ и Ω/T — множители

Лагранжа. Варьируя $n(r)$ на δn в интервале $(r, r + dr)$, приходим к интегральному уравнению относительно $n(r)$, после дифференцирования которого по r получаем простое интегродифференциальное

$$n' = \frac{\Gamma^2 \rho n}{Tr} \int_0^r nr \, dr - \Gamma\rho r n \frac{\Omega}{T}.$$

При $T = 0$ возможно единственное гладкое решение этого уравнения: $n(r) = 2\Omega/\Gamma$. Оно же годится и для всех положительных и отрицательных температур, если выполнено соотношение $\Omega = N\Gamma/2\pi R^2$. Но если Ω отличается от этого значения, то плотность вихрей будет уже неравномерной.

Рассмотрим случай $\Omega = 0$. Он возникает, если момент M почему-либо не сохраняется (например, неровности стенок сосуда). В этом случае при $T = \infty$ распределение плотности вихрей, по-прежнему, равномерно, но при $T \rightarrow +0$ вихри концентрируются вдоль стенок сосуда и вращение в центре замедлено. Так качественно можно описать медленное вращение поплавок, приписывая некоторую положительную температуру системе вихрей.

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 февраля 1976 г.

Литература

- [1] L.Onsager. Nuovo Cim. Suppl. 6, 279, 1949.
- [2] J.B.Taylor, B.McNamara. Phys. Fluids, 14, 1492, 1971.
- [3] G.Joyce. D.Montgomery. I.Plasma Physics, 10, 107, 1973.
- [4] S.F.Edwards, J.B.Taylor. Proc. Roy. Soc., London, A336, 257, 1974.
- [5] В.К.Ткаченко. ЖЭТФ, 67, 1984, 1974.