Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 6, стр. 359 – 362 *20 марта 1976 г.*

НОВЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ ТРЕХ И БОЛЕЕ ТЕЛ

Д.А.Киржниц, Н.Ж.Такибаев

Предлагается метод решения задачи малого (большего двух) числа тел, основанный на законе эволюции системы с изменением величины константы связи. В задаче упругого (n, d)-рассеяния уже низшее приближение метода дает унитарные, согласующиеся с опытом выражения.

Среди особенностей задачи малого числа тел (ЗМЧТ), затрудняющих ее решение, обычно выделяют неоднозначность уравнения Липпмана–Швингера и нефредгольмовский тип его ядра. Однако, эти особенности легко устраняются переходом, например, к известным уравнениям Фаддеева [1].

Более существенной в практическом плане представляется другая трудность ЗМЧТ, состоящая в расходимости борновского ряда. В рассматриваемой ниже задаче рассеяния нейтрона на дейтроне первые борновские члены во много раз расходятся с опытом и резко противоречат условию унитарности[1]. Это заставляет либо проводить трудоемкое численное интегрирование уравнений Фаддеева, либо использовать искусственную процедуру "унитаризации", либо вообще отказываться от динамического описания, базируясь на общих требованиях унитарности и аналитичности [2].

Предлагаемый новый подход в ЗМЧТ, свободный от этой трудности, применялся ранее в квантовой теории поля и в задаче двух тел [3]. Он основан на законе эволюции системы с изменением не времени, как обычно, а величины константы связи g, определяемой как множитель пропорциональности в гамильтониане взаимодействия

$$H_{int} = gV. \qquad (1)$$

Дело сводится к относительно простым по виду дифференциальным по g уравнениям, которые органически включают в себя связанные состояния. Главная в интересующем нас плане особенность предлагаемого метода состоит в точном выполнении условия унитарности (и причинности) на каждом этапе последовательных приближений.

Применительно к задаче упругого (n, d)-рассеяния при отсутствии трехчастичного связанного состояния (квартетное и высшие парциальные волны дублетного рассеяния) уже низшее приближение метода хорошо согласуется с опытом.

---

[1] Это связано, по-видимому, с "рыхлостью" дейтрона, благодаря которой он сильно взаимодействует с третьей частицей. В обратном предельном случае $g \to \infty$ (см. ниже [1]) энергия связи дейтрона $\sim g^2$ и велика сравнительно с его взаимодействием с третьей частицей, которое порядка g. Поэтому в рассматриваемом пределе виртуальный развал дейтрона и само (n, d)-взаимодействие отсутствуют.

1. Уравнения предлагаемого метода имеют вид [3]

$$\frac{df_{mn}}{dg} = -\frac{m}{2\pi} V_{mn} - 2\pi i \sum_s f_{ms} V_{sn} \delta(E_s - E_n) \qquad (2)$$

$$\frac{dV_{mn}}{dg} = \sum_s V_{ms} V_{sn} \left(\frac{1}{E_m - E_s - i\delta} + \frac{1}{E_n - E_s + i\delta} \right), \qquad (3)$$

где f_{mn} – амплитуда рассеяния для перехода $n \to m (E_m = E_n)$, V_{mn} – матричный элемент гейзенбергова оператора V (см. (1)), m – приведенная масса, выполнение закона сохранения импульса подразумевается. Сумма включает полный набор состояний, в том числе состояния дискретного спектра, для которых

$$dE_n / dg = V_{nn} . \qquad (4)$$

Для упругих двухчастичных реакций уравнение (2) может быть явно решено разложением по парциальным волнам, что дает обычную параметризацию амплитуды $f_l(k) = [\exp(2i\delta_l(k)) - 1]/(2ik)$, где

$$\frac{d\delta_l(k)}{dg} = -\frac{mk}{2\pi} V_l(k), \qquad V_l(k) \equiv \langle \mathbf{k}_1 - \mathbf{k} | V | \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}' \rangle_l |_{k=k'} . \qquad (5)$$

Хотя уравнение (3) и не может быть решено в общем виде, каждый член его итерационного ряда вносит унитарный (благодаря эрмитовости V_{mn}) и причинный (в силу правил обхода в (3)) вклад в амплитуду рассеяния. Согласно (5) дело сводится к итерационному ряду для фазы рассеяния, быстро сходящемуся при отсутствии многочастичных связанных состояний.

2. Низшему приближению метода отвечает диаграмма рис. 1, *а* для правой части (3), а соответствующее выражение для фазы (n, d)-рассеяния может быть записано в форме

$$\delta_l(k) = -\frac{16}{3} \left(\frac{k}{q} (q^2 + \kappa^2) \int_\kappa^\infty \frac{d\kappa \kappa}{(q^2 + \kappa^2)^2} \bar{\delta}(q) \right)_l . \qquad (6)$$

Здесь $\bar{\delta}$ – фаза двухчастичного s-рассеяния, $\kappa^2/2m$ – энергия связи дейтрона, $q = |\mathbf{k} + \mathbf{k}'/2| = |\mathbf{k}' + \mathbf{k}/2|$ – переданный при развале и образовании дейтрона импульс. Выражение для длины s-рассеяния имеет вид

$$a_0 = -\lim_{k \to 0} \delta_0(k)/k = -\frac{16}{3} \kappa^2 \int_\kappa^\infty \frac{d\kappa}{\kappa^3} \bar{a} , \qquad (7)$$

где $\bar{a}$ – длина двухчастичного рассеяния.

Для пояснения укажем, что двухчастичное взаимодействие принято сепарабельным (см. ниже). Это позволяет заменить произведение матричных элементов V для развала и образования дейтрона аналогичным произведением для двухчастичного рассеяния и перехода "дейтрон-дейтрон" и далее, согласно (4), (5), произведением производных по g энергии связи дейтрона и фазы двухчастичного рассеяния. Возникающие интегралы по g заменены интегралами по величине κ. Граничные условия по g выбраны в соответствии со сказанным в сноске -

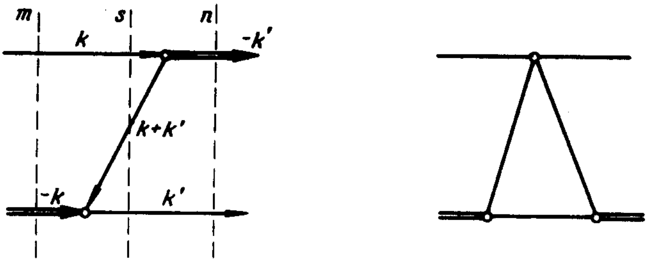

Рис. 1

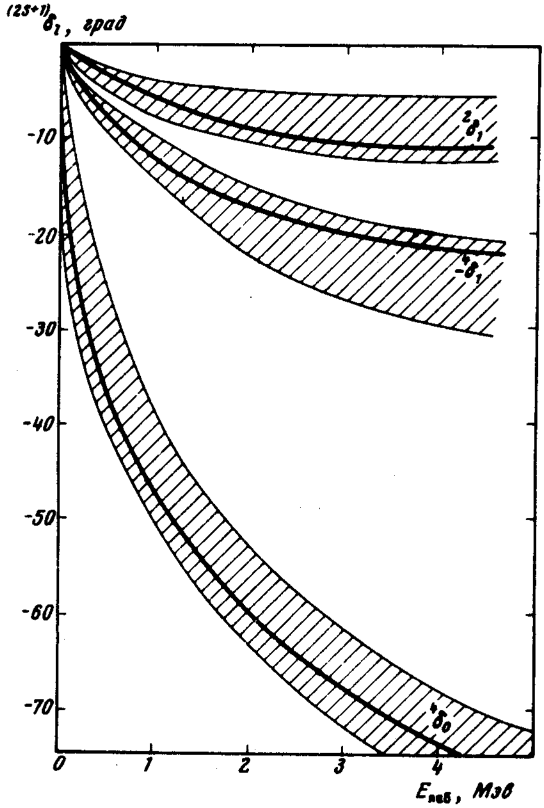

Рис. 2

3. Конкретный расчет проводился с использованием известного сепарабельного двухчастичного потенциала Ямагучи

$$< \mathbf{k}_1 - \mathbf{k} \,|\, V \,|\, \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}' > = 4\pi\nu^*(k')\nu(k), \quad \nu(k) = \gamma^2/(k^2+\gamma^2),$$

действующего лишь в s-состоянии (обратный эффективный радиус $\gamma = 1{,}44$ ф$^{-1}$ велик по сравнению с обратной длиной рассеяния $\kappa = 0{,}23$ ф$^{-1}$).

Вводя обозначения $\xi \equiv k/\kappa$ и $a \equiv \kappa/\gamma << 1$, имеем

$$a = \sqrt{|g|\gamma/2} - 1, \quad \bar{a} = -\frac{2(1+a)^2}{\kappa(2+a)}, \quad \operatorname{tg}\bar{\delta}(k) = -2a\xi(1+a)^2 \Big/ [(a^2\xi^2+1)^2 +$$

$$+ (1+a)^2(a^2\xi^2 - 1)] .$$

Отсюда согласно (7) длина квартетного s-рассеяния

$$^4a_0 = \frac{16}{9\kappa}\left(1 - \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a^2 + \dots\right) = 6{,}75\ \text{ф};$$

опытное значение – 6,35 ф. Выражения для фаз рассеяния (см. (6)) довольно громоздки и мы приведем лишь одно из них

$$^4\delta_0(k) = -\frac{8}{3\kappa}\left[\left(\frac{3}{4\xi} + \frac{1}{3\xi^3}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{3\xi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4\xi} + \frac{1}{\xi^3}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] + \dots .$$

Сравнение с опытом проведено на рис. 2 и свидетельствует о достаточно хорошем согласии [4].

Сходимость метода видна из оценки вклада в длину рассеяния следующего приближения (см. рис. 1, б). Этот вклад составляет $\frac{128}{27\kappa}\left(\ln\left(\frac{9}{8}\right) - \frac{1}{12}\right)$ и на порядок величины меньше приведенной выше цифры. Подчеркнем, что в обычном борновском ряду соотношение между вкладами диаграмм рис. 1. обратное.

4. Подробное изложение результатов этой статьи будет опубликовано. Описание дублетного s-рассеяния, когда имеется связанное состояние – тритон, также будет предметом отдельной работы.

Мы благодарны участникам семинаров, руководимых И.С.Шапиро и Е.Л.Фейнбергом, особенно А.М.Бадалян, В.А.Сергееву и Ю.А.Симонову за полезные дискуссии.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 февраля 1976 г.

Литература

[1] В. де Альфаро, Т.Редже. Потенциальное рассеяние, М., изд. Мир, 1966; А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., изд. Наука, 1971.

[2] И.С.Шапиро. Теория прямых ядерных реакций, М.Атомиздат, 1963; А.М.Бадалян, Ю.А.Симонов. ЭЧАЯ, 6, 299, 1975.

[3] Д.А.Киржниц. ЖЭТФ, 49, 1544, 1965; Сб.„Проблемы теоретической физики". Памяти И.Е.Тамма, М., изд. Наука, 1972.

[4] J.D.Seagrave In: Three-body Problem. McKee and P.M.Rolph, Amsterdam – London, 1970 p. 41.