Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 8, стр. 462 – 466 *20 апреля 1976 г.*

ТЭЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю.А.Башилов, С.В.Покровский

В работе получено точное решение задачи о движении тонкой цилиндрической оболочки под действием внешнего давления. Показано, что при сжатии развиваются неустойчивости тэйлоровского типа, которые не могут быть стабилизированы вращением. Получен спектр возбуждений плоской пленки в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения.

Для получения металлического водорода, сверхсильных магнитных полей и для термоядерного синтеза предлагалось использовать лайнер [1 – 3]. Он представляет собой тонкостенный металлический цилиндр, сжимаемый нарастающим во времени магнитным полем. При сжатии лайнера развиваются неустойчивости тэйлоровского типа. Экспериментально наблюдалось, что лайнер становится после сжатия в продольном поле цилиндром, гофрированным параллельно оси [4]. Другие моды неустойчивости связаны с изгибанием силовых линий. Поэтому продольные неустойчивости имеют значительное энергетическое преимущество перед остальными [1].

В работе исследовано развитие такого типа неустойчивости при произвольных амплитудах. Аналогичное исследование для плоской поверхности выполнено в работе [5]. В данной работе также разобрано в линейном приближении влияние поверхностного натяжения на спектр возбуждений тонкой пленки.

Зададим поверхность параметрически: $\mathbf{r}(\psi, t)$. Здесь t – время, а ψ – лагранжева координата, от которой $\mathbf{r}$ зависит циклически. Элемент массы

$$dm = \rho d\psi,$$

где $2\pi\rho$ – масса единицы длины цилиндра. Уравнение движения имеет вид:

$$\rho\ddot{\mathbf{r}} = p[\mathbf{k}, \mathbf{r}']. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – орт вдоль оси цилиндра, p – внешнее давление, а штрих означает дифференцирование по ψ.

Подстановкой

$$Z = x + iy = re^{i\phi}, \tag{2}$$

где x, y – декартовы, а r, ϕ – полярные координаты, оно приводится к виду

$$\rho\ddot{Z} = i\,p(t)Z'. \tag{3}$$

Рассмотрим три временны́х режима давления: 1) постоянное давление $p = \rho a = \mathrm{const}$; 2) импульсный режим $p = \rho a\,\delta(t)$; 3) $p = \rho a\,t^{-2}$. Последний случай интересен потому, что он соответствует степенным режимам сжатия оболочки конечной толщины [6]. Во всех трех случаях исследуется движение круглого цилиндра, искаженного k-й гармоникой. Начальные условия задаются в виде

$$Z(\psi, t_0) = e^{i\psi} - \frac{\mu}{k}e^{ik\psi}, \tag{4}$$

$$\dot{Z}(\psi, t_0) = 0, \tag{5}$$

где $|\mu| < 1$. В первых двух случаях полагается $t_0 = 0$. Тогда

$$Z(\psi, t) = R(t)\left[e^{i\psi} - \frac{\mu(t)}{k}e^{ik\psi}\right].$$

При $|\mu(t)| > 1$ кривая становится самопересекающейся. Поэтому естественно считать, что пленка живет до момента времени t^* такого, что $|\mu(t^*)| = 1$. Может, однако, иметь место ситуация, когда круглый цилиндр схлопывается раньше. Время схлопывания t_{col} определяется уравнением $R(t_{col}) = 0$. В таком случае считаем движение устойчивым.

Обычная тэйлоровская неустойчивость плоской поверхности развивается с образованием длинных и узких выступов в сторону избыточного давления, чередующихся с неглубокими широкими впадинами. Такого типа неустойчивости есть и на цилиндре. Им соответствуют отрицательные k в формуле (4). Если $|k| \gg 1$ и $e^{-\sqrt{|k|}} \ll \mu < 1$, то $t^* \ll t_{col}$. Для рассматриваемых режимов давления приближенное решение уравнения $\mu(t^*) = 1$ дает:

1) $t^* = \frac{1}{\sqrt{a|k|}} \ln\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - 1}\right)$, $t_{col} = \pi/2\sqrt{a}$ (постоянное давление);

2) $t^* = \frac{1-\mu}{1+\mu|k|} \frac{1}{a}$, $t_{col} = \frac{1}{a}$ (эта и следующая формулы для импульсного режима точные);

3) $t^* = t_o(1-\tau)$, где $\tau = \frac{1}{\sqrt{a|k|}} \ln \frac{\frac{1}{\mu} + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - 1 + \frac{1}{4a|k|}}}{1 + (4a|k|)^{-1/2}}$

Здесь $a|k| >> 1$ (степенные режимы).

Здесь надо оговорить, что в третьем случае интересны режимы возрастания давления, что соответствует движению по времени от $t_o < 0$ до 0. Можно, однако, работать с положительными временами, двигаясь от $t_o > 0$ до 0. Именно поэтому положено $t^* = t_o(1-\tau)$. Кроме описанной неустойчивости у цилиндра существует другой тип неустойчивости, отсутствующий у плоской поверхности. Ему соответствуют положительные k в формуле (4). Развиваются узкие выступы, направленные внутрь цилиндра, чередующиеся с широкими впадинами. Заметим, что линейное приближение не дает никакой информации о неустойчивости такого вида. Время жизни в этой ситуации также может быть мало, если амплитуды μ близки к единице, а k – велики.

1) $t^* = \pi/\sqrt{ak}$ при $1-\mu < \pi^2/2k$ и $k >> 1$;

2) $t^* = \frac{1+\mu}{1+\mu k} \frac{1}{a}$ при $k >> 1$;

3) $\tau = 1 - \frac{t^*}{t_o} = \frac{\pi}{\sqrt{ak}}$ при $1-\mu < \frac{\pi}{2\sqrt{ak}}$ и $k >> a + \frac{1}{a}$.

Высказывались предположения о возможности стабилизации лайнера относительно тэйлоровской неустойчивости вращением [7, 8]. Здесь рассмотрен этот вопрос для тонкостенного цилиндра в случае постоянного давления.

Считаем, что в начальный момент цилиндр вращается с угловой скоростью Ω, имея нулевую радиальную скорость. При этом условия (5) заменяются на

$$\dot{Z}(\psi, 0) = i\Omega Z(\psi, 0). \qquad (6)$$

Тогда

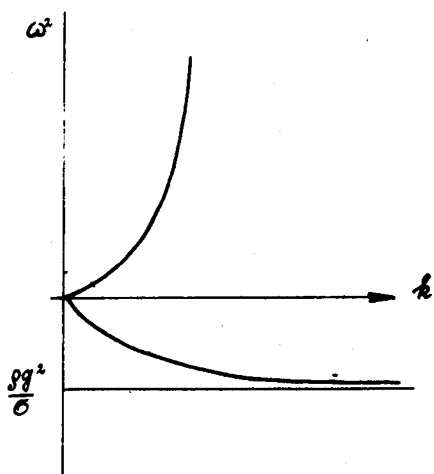
$$Z(\psi, t) = R(t)[e^{i(\psi + a(t))} - \frac{\mu(t)}{k} e^{i(k\psi + \beta(t))}].$$

$R(t)$ при $\Omega \neq 0$ не обращается в ноль, т. е. схлопывания нет. Как и раньше, условие $\mu(t^*) = 1$ определяет время жизни t^*. Оказывается, что в диапазоне $\sqrt{a} < \Omega < \sqrt{ak}$ стабилизируются моды с $k > 1$, но моды с $k < 0$ по-прежнему неустойчивы. Полный разбор со всеми формулами будет дан в более подробной статье.

Рассмотрим теперь влияние поверхностного натяжения на устойчивость пленки. Пусть плоская пленка находится в поле тяжести и поддерживается снизу давлением $p = \rho g$, где ρ – линейная плотность, g – ускорение свободного падения. Параметрическое задание поверхности есть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t)$. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{[\mathbf{r}', [\mathbf{r}'', \mathbf{r}']]}{|\mathbf{r}'|^3} + g[\mathbf{r}', \mathbf{j}] - g\mathbf{k}. \qquad (7)$$

Здесь σ – двусторонний коэффициент поверхностного натяжения пленки; $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – неподвижная тройка ортов, а штрих означает дифференцирование по ξ. За первый член в правой стороне (7) ответственно поверхностное натяжение, за второй – сила давления, а за третий – сила тяжести.



Линеаризуя (7) вблизи равновесного решения $\mathbf{r} = \xi \mathbf{i}$, получаем спектр возбуждений (рисунок):

$$\omega^2 = \frac{1}{2\rho} \left(\sigma k^2 \pm \sqrt{\sigma^2 k^4 + 4\rho^2 g^2 k^2}\right).$$

Таким образом видно, что при всех σ существует неустойчивая мода в отличие от случая слоя жидкости конечной толщины. Это объясняется тем, что всегда существуют точки перегиба, где вторая производная по ξ равна нулю. В этих точках поверхностное натяжение не работает, а силы давления и тяжести не совпадают по направлению. В этих точках и развивается неустойчивость.

Мы благодарны С.И.Анисимову за предложенную тему и многочисленные ценные обсуждения.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 февраля 1976 г.

Литература

[1] E.G.Harris. Phys. Fluids, 5, 1057, 1962.

[2] R.S.Hawke, et al. Nature Phys. Sci., 233, 79, 1971.

[3] R.S.Hawke, D.E.Duerre, J.G.Huebel, H.Klapper, D.I.Steinberg. Appl. Phys., 43, 2734, 1972.

[4] J.M.Okada, D.C.de Pakch. Bull. Am. Phys. Soc., 17, 1005, 1972.

[5] E.Ott. Phys. Rev. Lett., 29, 1429, 1972.

[6] К.В.Брушлинский, Я.М.Каждан. УМН, 18, 3, 1963.

[7] A.Bareilon, D.L.Book, A.L.Cooper, JPF, 17, 1707, 1974.

[8] D.L.Book, N.K.Winsor. JPF, 17, 662, 1974.