Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 11, стр. 624 – 626 *5 июня 1976 г.*

РАСПЛЫВАНИЕ ПУЧКА ФОНОНОВ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

Б.Д.Лайхтман, А.В.Ломакин

Рассматривается распространение узкого малоинтенсивного пучка фононов в сверхтекучем гелии при $T < 0{,}6$К. Получен закон расширения пучка.

В недавней работе Миллса, Шерлока и Вьятта [1] для исследования закона дисперсии фононов в сверхтекучем гелии производились эксперименты по расплыванию узкого пучка фононов, испущенных нагретым телом в ванну с гелием, имеющим температуру $\leqslant 0{,}1$К. Целью настоящей работы является расчет этого эффекта для того случая, когда пучок имеет малую интенсивность.

Как известно, при температуре ниже 0,6К за все кинетические явления ответственны только фононы. Давление мы будем предполагать не слишком большим, так что спектр фононов распадный. В этих условиях можно воспользоваться тем, что в силу малого отклонения закона дисперсии фононов в гелии от линейного, релаксация фононов, распространяющихся вдоль данного направления происходит гораздо быстрее, чем релаксация между направлениями [2 – 4], которую мы будем называть поперечной. Поскольку расплывание пучка связано именно с поперечной релаксацией, распределение фононов вдоль каждого данного направления можно считать равновесным и характеризовать температурой $\Theta(\vec{\kappa})$, зависящей от направления $\vec{\kappa} = \mathbf{k}/k$, где $\mathbf{k}$ – волновой вектор фононов. Энергия фононов, распространяющихся вдоль данного направления $\mathcal{E}(\vec{\kappa}) = (\pi/120)\Theta^4/(\hbar c)^3$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c\kappa_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right]_{\text{ст}}, \qquad (1)$$

которое можно получить, умножая кинетическое уравнение для фононной функции распределения на $\hbar c k^3 dk/(2\pi)^3$ и интегрируя по k от 0 до ∞. Вид оператора поперечной релаксации $[\partial\mathcal{E}/\partial t]_{\text{ст}}$ был получен в работе [4].

В настоящей работе мы будем считать интенсивность пучка настолько низкой, что отклонение температуры в пучке от ее значения в ванне относительно мало. То есть $\Theta = T(1+Z)$, $|Z| \ll 1$. В линейном приближении по Z при стационарных условиях уравнение (1) принимает вид

$$\kappa_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} = -\frac{1}{4c\tau_\perp} l^2(l^2+2)Z, \qquad (2)$$

где $\tau_\perp$ – поперечное время релаксации, $l_i = e_{ijm}k_j \dfrac{\partial}{\partial k_m}$, e_{ijm} – совершенно антисимметричный тензор третьего ранга. Нас будет интересовать только та область расплывания пучка, где он остается еще достаточно узким, т. е.

$$\kappa_x,\ \kappa_y \ll \kappa_z \approx 1, \tag{3}$$

где ось z направлена вдоль направления распространения пучка. Тогда $l_x \approx -\partial/\partial\kappa_y$, $l_y \approx \partial/\partial\kappa_x$, $l_z \ll l_x$, l_y и (2) сводится к виду

$$\frac{\partial Z}{\partial z} + \kappa_\lambda \frac{\partial Z}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{4c\tau_\perp}\left(\frac{\partial^2}{\partial\kappa_\lambda^2}\right)^2 Z, \tag{4}$$

где индекс λ пробегает значения 1, 2. Это уравнение нужно решать с начальным условием $Z = Z_0\,\delta(\vec{\kappa}_\perp)\,\delta(\mathrm{x}_\perp)$, где $\vec{\kappa}_\perp$ и $\mathrm{x}_\perp$ – двумерные вектора в плоскостях $(\kappa_x\kappa_y)$ и (xy) соответственно. Величина Z_0 связана с полным потоком энергии в пучке S_0 соотношением $S_0 = (\pi/30)Z_0 T^4/\hbar^3 c^2$. При $x_\lambda \to \pm\infty$ или $\kappa_\lambda \to \pm\infty$ величина Z должна стремиться к нулю.

Уравнение (4) с помощью преобразования Фурье по переменным x, y, κ_x, κ_y сводится к уравнению в частных производных первого порядка, которое без труда решается. В результате

$$Z = \frac{Z_0}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \rho\,d\rho \int_0^\infty \sigma\,d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi\, I_0\left(\sqrt{x_\perp^2\rho^2 + \kappa_\perp^2\sigma^2 + 2x_\perp\rho\kappa_\perp\sigma\cos(\phi-\psi)}\right) R,$$

где (5)

$$R = \exp\left\{-\frac{z}{4c\tau_\perp}\left[\sigma^4 - 2\sigma^3\rho z\cos\psi + \frac{2}{3}\sigma^2\rho^2 z^2(1+2\cos^2\psi) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sigma\rho^3 z^3\cos\psi + \frac{1}{5}\rho^4 z^4\right]\right\} \tag{6}$$

ϕ – угол между векторами $\mathrm{x}_\perp$ и $\kappa_\perp$.

Из выражения (5) нетрудно определить зависимость плотности потока энергии в пучке от расстояния до его центра

$$S(z, x_\perp) = \frac{S_0}{2\pi}\left(\frac{20c\,\tau_\perp}{z^5}\right)^{1/2} f\left[\left(\frac{20c\,\tau_\perp}{z^5}\right)^{1/4} x_\perp\right], \tag{7}$$

где

$$f(x) = \int_0^\infty I_0(xy)\,e^{-y^4} y\,dy. \tag{8}$$

При $x >> 1$ $f(x)$ имеет асимптотику:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4}{x}\right)^{2/3} \exp\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^{4/3}\right] \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^{4/3} - \frac{\pi}{3}\right]. \qquad (9)$$

Появляющиеся здесь осцилляции имеют чисто математическую природу. Они связаны с высоким порядком дифференциального оператора в правой части (4) (для оператора второго порядка никаких осцилляций не было бы).

Выражение (5) является фактически функцией Грина уравнения (4). С его помощью нетрудно изучить расширение пучка фононов, начальное распределение которого достаточно узкое в k- и x-пространстве, но имеет произвольную форму. При этом можно заметить, что масштабы $x_\perp$ и $\kappa_\perp$, на которых изменяется функция Грина (5), по порядку величины составляют $z\,(z/c\,r_\perp)^{1/4}$ и $(z/c\,r_\perp)^{1/4}$, соответственно. По этой причине пучок фононов с начальным распределением произвольной формы при достаточно больших значениях z описывается распределением (5). Это распределение, таким образом, является асимптотически устойчивым.

Следует однако иметь в виду, что величина $\int \kappa_\perp^2 Z d^2\vec{\kappa}_\perp d^2 x_\perp$, в силу уравнения (4) не зависящая от z, для распределения (5) тождественно равна нулю. Конечное значение этой величины для узкого, но не δ-образного источника получается, если кроме (5) учесть еще и следующий член асимптотического разложения по обратным степеням z.

В заключение мы благодарим В.Л.Гуревича за обсуждение работы.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 марта 1976 г.

Литература

[1] N.G.Mills, R.A.Sherlock, A.F.G.Wyatt. Phys. Rev. Lett., 32, 978, 1974; J. of Phys., C8, 2575, 1975.

[2] Л.Д.Ландау, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 19, 637, 1949; 19, 709, 1949.

[3] H.J.Maris. Phys. Rev., A8, 1980, 1973.

[4] В.Л.Гуревич, Б.Д.Лайхтман. ЖЭТФ, 69, 1230, 1975.