Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 5, стр. 268 – 271 *5 марта 1980 г.*

ДВИЖЕНИЕ АТОМА В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М.Б.Кадомцев

При движении атома в сверхсильном магнитном поле $B > 10^{12}$ Гс возникает эффект анизотропии масс. Показано, что частица с анизотропной массой в неоднородном поле совершает сложное движение: в поле прямого тока замедление радиальной скорости приводит к упругому рассеянию, а в поле диполя меняется знак производной от центробежного потенциала, что приводит к падению частицы на диполь.

После обнаружения колоссальных магнитных полей в пульсарах ($\sim 10^{12}$ Э) приобрела актуальность проблема поведения вещества в сверхсильных полях [1 – 3]. Атом, помещенный в такое поле, вытягивается вдоль по полю, одновременно сжимаясь со всех сторон. Следовательно, растет энергия связи, что приводит к появлению притяжения в область бóльшего поля. Но помимо этого, как известно, атом в достаточно сильном магнитном поле становится как бы более массивным в поперечном полю направлении. Этот эффект легко понять, учитывая, что при движении атома со скоростью $v_\perp$ поперек поля, его электронные оболочки деформируются таким же образом, как если бы действовало электрическое поле $v_\perp B/c$. Энергия поляризованного атома, с другой стороны, равна $E = d^2/2a$, где $d = aE$ — дипольный момент, a — коэффициент поляризации. Таким образом, появляется дополнительная энергия $E = \frac{1}{2}\frac{aB^2}{c^2}v_\perp^2$. Полная энергия равняется

$$E = \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{1}{2}\frac{aB^2}{c^2} v_\perp^2 - U(B). \tag{1}$$

Здесь m_o — масса атома, $U(B)$ — энергия связи.

Последний член $U(B)$ при больших B оказывается очень слабозависящим от B (как $\ln^2 B$) и для простоты его можно исключить из рассмотрения. Перейдем к единицам, в которых $m_o = 1$, B измеряется в единицах $c\sqrt{m_o}/\sqrt{a}$, тогда лагранжиан (1) упростится:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} v_\parallel^2 + \frac{1}{2}(1 + B^2) v_\perp^2, \tag{2}$$

где $v_\parallel$, $v_\perp$ — компоненты скорости соответственно вдоль и поперек поля. Рассмотрим теперь две конкретные задачи.

а) Атом в поле прямого тока.

В этом случае B имеет только азимутальную компоненту (мы пользуемся цилиндрической системой), причем единицы длины можно выбрать так, что $B = R^{-1}$. Такое поле не может, конечно, существовать в условиях космоса, однако для экситонов в твердом теле данная ситуация может быть реализована. Пусть $z = 0$ (движение по z очевидно); тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} v_\phi^2 + \frac{1}{2}(1 + R^{-2}) v_R^2, \tag{3}$$

где $v_\phi = R\dot{\phi}$, $v_R = \dot{R}$. Имеем уравнения движения: $R^2\dot{\phi} = M = \text{const}$,

$$(1 + R^{-2})\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{1}{R^3}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{M^2}{R^3} = 0. \tag{4}$$

Закон сохранения энергии требует (его можно получить непосредственно из уравнения движения):

$$\frac{1}{2}(1 + R^{-2})\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{R^2} = \text{const} = v^2/2, \tag{5}$$

где v — скорость частицы при $R = \infty$.

Как хорошо видно из предыдущего выражения, магнитное поле приводит к замедлению радиального движения частицы (этот эффект играет особую роль при $R < 1$). Найдем теперь минимальное расстояние сближения из условия $dR/dt = 0$. Оно оказывается равным прицельному расстоянию $R_0 = M/v$. Но, так как угловая скорость $\dot{\phi} = M/R^2$ сохраняет свое прежнее значение, то атом (прежде чем выйти из области $R < 1$) совершает много оборотов. Можно сказать, что в области сверх сильного поля частица на некоторое время застревает и выбрасывается в произвольном по ϕ направлении.

б) Атом в дипольном поле.

В сферической системе координат R, θ, ϕ уравнение силовой линии дается выражением

$$R = L \sin^2\theta, \tag{6}$$

где $L = \mathrm{const}$. Выберем так единицы, чтобы при $L = 1$, $\sin\theta = 1$ поле $B = 1$. Тогда

$$\mathbf{B} = \frac{R^2\mathbf{e}_z - 3\mathbf{R}(\mathbf{e}_z\mathbf{R})}{R^5}; \quad B^2 = \frac{1 + 3\cos^2\theta}{R^6}. \tag{7}$$

Примем величину $L = R/\sin^2\theta$ за одну из обобщенных координат. Второй (ортогональной к L) координатой выберем $s = \cos\theta/R^2$, третьей — оставим ϕ. Тогда Лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{LL}(1 + B^2)\dot{L}^2 + \frac{1}{2} g_{ss}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(1 + B^2)\rho^2\dot{\phi}^2. \tag{8}$$

Здесь g_{LL}, g_{ss} — компоненты метрического тензора, а $\rho = R\sin\theta$ — расстояние от оси симметрии. Пусть движение локализовано в плоскости $s = 0$, т. е. $\theta = \pi/2$. Тогда (8) упростится:

$$L = \frac{1}{2}(1 + L^{-6})\dot{L}^2 + \frac{1}{2}(1 + L^{-6})\dot{\phi}^2 L^2. \tag{9}$$

Можно ввести гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + L^{-6}}K^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{L^2(1 + L^{-6})}, \tag{10}$$

где K — сопряженный с L импульс, M — момент количества движения. Закон сохранения энергии (который опять можно получить из уравнения движения) запишется так:

$$(1 + L^{-6})\dot{L}^2 + \frac{M^2}{L^2(1 + L^{-6})} = v^2 = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Найдем точку поворота, где $\dot{L} = 0$. Для нее получаем уравнение:

$$L_o^2 L^4/(L^6 + 1) = 1, \tag{12}$$

где $L_o = M/v$ – прицельный параметр. Легко увидеть, что это уравнение имеет действительные решения только при $L_o > \sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx 1{,}37$. При этом получается два корня: бо́льший соответствует точке поворота для частицы пришедшей из ∞, меньший – из центра.

При $L_o < \sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$, $\dot{L}$ не обращается в 0 – это связано с тем, что при $L < 1$ центробежный потенциал не возрастает, а убывает при уменьшении L. При $L << 1$ уравнение (11) принимает вид (приближенно):

$$L^{-6} \dot{L}^2 = v^2 - L_o^2 v^2 L^4 . \tag{13}$$

Второй член мал (при $L_o < 1$). Пренебрегая им, получаем приближенное решение $L = 1/\sqrt{2v(t - t_o)}$ для частицы, падающей из $L = \infty$.

Рассмотрим теперь произвольное движение. Гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{g_{LL}(1 + B^2)}\,K^2 + \frac{1}{2g_{ss}}\,P^2 + \frac{M^2}{2(1 + B^2)\,L^2 \sin^6\theta} . \tag{14}$$

Здесь K, P, M – обобщенные импульсы, соответствующие координатам L, s, ϕ. Нетрудно показать, что

$$B^2 = \frac{1 + 3\cos^2\theta}{L^6 \sin^2\theta}; \qquad g_{LL} = \frac{\sin^6\theta}{1 + 3\cos^2\theta}; \qquad g_{ss} = \frac{\cos^3\theta}{s^3(1 + 3\cos^2\theta)};$$

последний член в гамильтониане имеет максимум при $\theta = \pi/2$. Соответственно, по отношению к движению вдоль силовой линии точка $\theta = \pi/2$ соответствует "горбу" на потенциале и вблизи $\theta = \pi/2$ движение по θ становится неустойчивым. Таким образом, при $B > 1$ атом падает вдоль силовой линии на источник поля, что опять связано с тем, что центробежный потенциал не возрастает, а убывает при приближении к центру.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
25 декабря 1979 г.

Литература

[1] R.J.Elliot, R.London. J. Phys. Chem. Solids, 15, 196, 1960.

[2] Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. ЖЭТФ, 53, 717, 1967.

[3] Б.Б.Кадомцев. ЖЭТФ, 58, 1765, 1970.