Письма в ЖЭТФ, том 31, вып.6, стр. 333 – 337 20 марта 1980 г.

О СТРУКТУРЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМАХ С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

И.А.Кольчугина, В.А.Миронов, А.М.Сергеев

Показано существование стационарных связанных многосолитонных образований в физических системах, описываемых уравнением Шредингера с нелокальной нелинейностью.

За последние годы значительно возрос интерес к исследованию солитонов – образований, играющих фундаментальную роль в динамике многих нелинейных процессов (см., например, тематический выпуск [1]). В данной работе рассмотрены особенности структуры солитонов в условиях нелокальной нелинейности, т.е. при наличии в системе собственного нелинейного масштаба. Показано существование стационарных состояний в виде набора связанных солитонов, что представляет интерес, в частности, для проблемы плазменной турбулентности, построения моделей полевых частиц [1 – 3] и т.д.

В качестве исходного рассмотрим уравнение Шредингера

$$-i\Psi_t + \Delta\Psi - \phi\Psi = 0, \tag{1}$$

в котором потенциал ϕ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\phi - \phi = -\alpha\Delta|\Psi|^2 + \beta|\Psi|^2. \tag{2}$$

Система (1), (2) является модельной для описания ряда эффектов в различных физических системах. Она может быть получена, например, при исследовании самовоздействия интенсивных ленгмюровских волн, распространяющихся в бесстолкновительной замагниченной плазме перпендикулярно постоянному магнитному полю. При этом параметром нелокальности является ларморовский радиус электронов. Наибольший интерес представляет случай $\alpha = 1$, $\beta \ll 1$ ($\beta = v_S^2/v_A^2$, v_S и v_A – звуковая и альфвеновская скорости), что соответствует, в частности, условиям ионосферной плазмы, а также выполняется в экспериментах по удержанию и нагреву плазмы в термоядерных установках.

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ система (1), (2) описывает тепловое самовоздействие пучков электромагнитных волн в плазме и конденсированных средах (см., например,[4]), причем пространственным масштабом в материальной связи (2) служит длина теплопроводности. Эти же уравнения соответствуют модели Хартри для нуклонов с волновой функцией Ψ в самосогласованном поле ядерных сил с потенциалом типа Юкавы. Здесь собственный нелинейный масштаб определяется радиусом действия ядерных сил (комптоновской длиной волны пиона).

Рассмотрим одномерные локализованные решения исходной системы[1)] вида $\Psi = \Phi(x)\exp(-iEt)$, $\phi = \phi(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Phi_{xx} - (E + \phi)\Phi = 0; \quad \phi_{xx} - \phi = -\alpha\Phi_{xx}^2 + \beta\Phi^2; \quad E > 0 \qquad (3)$$

и остановимся подробнее на двух предельных случаях.

При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ из первого интеграла системы (3) нетрудно установить, что могут реализоваться лишь четные локализованные распределения. Качественное представление о структуре таких решений можно получить для достаточно узких (в масштабе ларморовского радиуса) распределений поля в верхнегибридном солитоне. При этом удобно исходить из уравнения

$$\Phi_{xx} + (\Phi^2 - E - u)\Phi = 0, \quad u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(x')\exp(-|x - x'|)\,dx' \qquad (4)$$

эквивалентного системе (3). Очевидно, что в случае $E \gg 1$ интегральная часть в нелинейном члене является плавной (на характерном масштабе солитона $(\sqrt{E})^{-1}$) функцией. Поэтому, солитонные решения уравнения (4) можно построить в адиабатическом приближении, рассматривая u как медленно меняющийся параметр. На фазовой плоскости (Φ_x, Φ), определяемой локальным значением u, солитонам соответствуют интегральные кривые, выходящие из седловой точки (0, 0) и

[1)]Исследуемые солитоны характеризуются экспоненциальной асимптотикой ($x \to \pm\infty$) функций Φ и ϕ. Локализованные решения в гамильтоновских системах четвертого порядка, имеющие асимптотику типа $\Phi, \phi \sim \cos k_1 x \exp(-k_2 x)$ либо $\Phi \sim \exp(-kx)$, $\phi = A\cos kx$, рассматривались ранее в [5, 6].

возвращающиеся в исходное состояние через определенное число оборотов внутри медленно меняющейся сепаратрисы. Так, при одном обороте имеем одиночный солитон с распределением поля, асимптотически близким ($E \to \infty$) к распределению в ленгмюровском солитоне $\Phi = \sqrt{2E}\,\mathrm{ch}^{-1}\sqrt{E}x$. Двум оборотам соответствует стационарный бисолитон, в котором за счет нелокальной связи два простых солитона захвачены в ямках плотности на определенном расстоянии друг от друга и т.д.

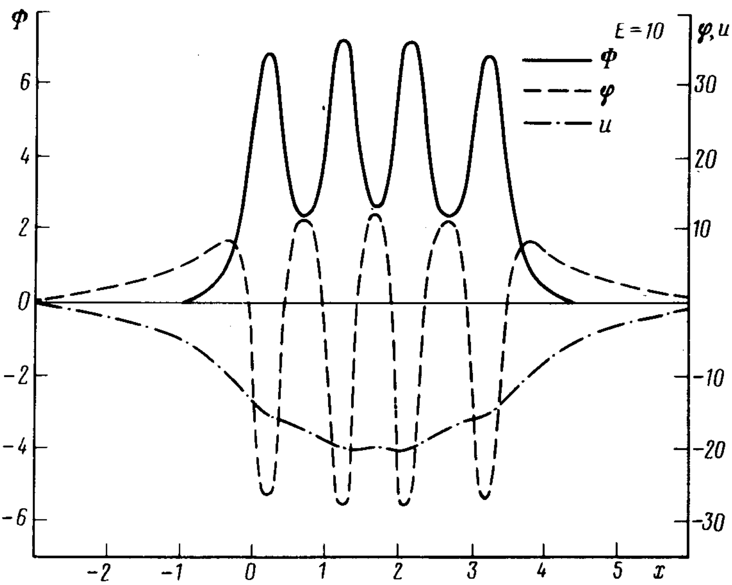

Рис.1

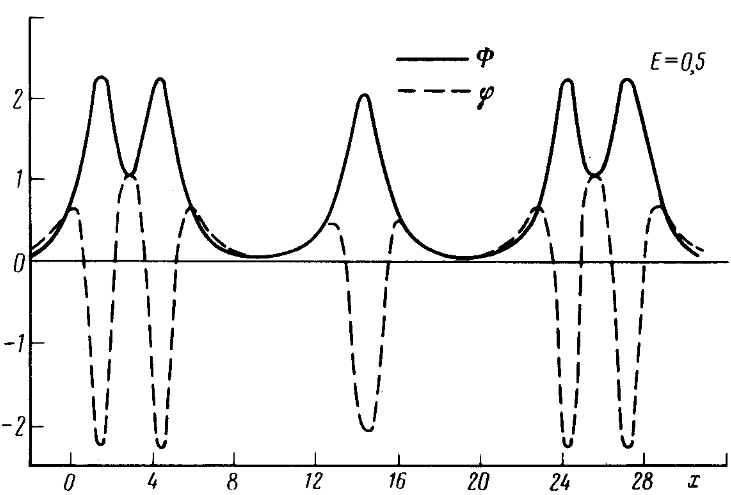

Рис.2

На рис.1 показано локализованное решение (четвертая мода) уравнения (4), полученное с помощью численного счета на ЭВМ. С уменьшением E амплитуда солитонов, образующих многогорбую структуру, уменьшается; появляются более сложные образования, состоящие из набора N-солитонных объектов (рис.2)[1]. При $E \to 0$ солитоны расширяются и перекрывают друг друга настолько, что пространственное распределение становится квазиоднородным ($\Phi \to \Phi_0 = 1/\sqrt{2}$). Таким образом, для любого значения E, т.е. отстройки частоты электрического поля от плазменной, имеется счетное множество различных солитонов ленгмюровских волн, распространяющихся с дозвуковой скоростью в замагниченной плазме низкого давления ($\beta \ll 1$) в направлении, перпендикулярном магнитному полю.

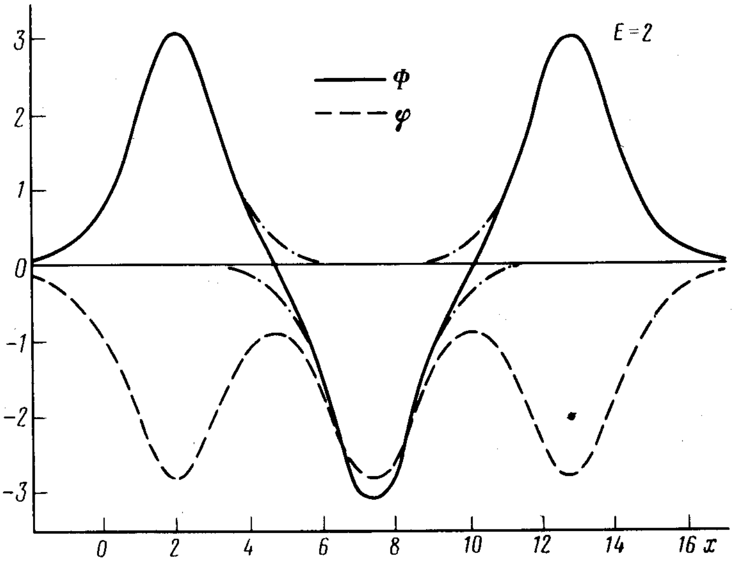

Рис.3

В случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$ переход к локальной нелинейности реализуется при $E \to 0$ и во всей области параметров $0 < E \leqslant 1$ возможно лишь одно четное солитонное решение, допускающее для $E = 1$ точное аналитическое выражение

$$\Phi = \phi = (3/2)\,\mathrm{ch}^{-2}(x/2). \tag{5}$$

Все собственные значения $E > 1$ бесконечно вырождены. При этом, как показывают численные расчеты, собственные функции "составляются" путем последовательного "добавления" одиночного солитона так, чтобы фазы колебаний в отдельных сгустках поля были сдвинуты на π (рис.3, штрих-пунктиром обозначен одиночный солитон), т.е имеет место почти суперпозиция таких образований (в нелинейной системе!). При $E > 1$ расстояние между солитонами увеличивается, так что в пределе остается простой солитон с распределением (5).

Исследование устойчивости связанного состояния наиболее просто провести в случае бисолитонного решения для $E \approx 1$. При этом рассто-

[2] Для краткости, мы опускаем здесь изложение этого вопроса. Более полное исследование, включая модуляционную неустойчивость, генерацию и взаимодействие солитонов, будет изложено в подробной работе.

яние между солитонами $\bar{x} = 2\int_0^\infty x\,|\Psi|^2\,dx$ существенно больше их размеров и взаимодействие между ними осуществляется "хвостами". Переходя от уравнения Шредингера к уравнению движения солитонов разной полярности и формы (5), получим

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{81}{2}\exp(-\sqrt{E}\,\bar{x}) - \frac{81}{16}\exp(-\bar{x}). \tag{6}$$

Видно, что устойчивое связанное состояние возможно лишь при $E > 1$, а расстояние между солитонами составляет $\bar{x}_0 = \ln 8/(\sqrt{E} - 1)$, что совпадает с численными расчетами. Более того, поскольку эти результаты определяются, главным образом, асимптотическим ($x \to \pm\infty$) поведением решений уравнений (3), естественно ожидать, что они качественно справедливы для двумерных и трехмерных солитонов.

Таким образом, нелокальность нелинейного взаимодействия в уравнении Шредингера приводит к удивительному разнообразию локализованных решений, получающихся почти суперпозицией одиночных солитонов (см. рисунки 1, 2, 3). Можно ожидать, что это обстоятельство окажется важным в понимании новых нетривиальных свойств взаимодействия частицеподобных образований.

Авторы признательны А.Г.Литваку, М.А.Миллеру за интерес к работе и К.А.Горшкову за обсуждение вопросов устойчивости связанных состояний солитонов.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1980 г.

Литература

[1] Physica Scripta, 20, №3 – 4, 1979.

[2] L.D.Faddeev, V.E.Korepin. Phys. Report, 42C, №1, 1978.

[3] V.G.Makhankov. Phys. Report, 35C, №1, 1978.

[4] А.Г.Литвак, В.А.Миронов, Г.М.Фрайман, А.Д.Юнаковский. Физика плазмы, 1, 60, 1975.

[5] В.А.Козлов, А.Г.Литвак, Е.В.Суворов. ЖЭТФ, 76, 148, 1979.

[6] К.А.Горшков, Л.А.Островский, В.В.Папко. ЖЭТФ, 71, 585, 1976; K.A.Gorshkov, L.A.Ostrovsky, V.V.Papko, A.S.Pikovsky. Phys. Lett., 74A, 177, 1979.