Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 2, с. 95 – 98

Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике

А. Б. Борисов[1)]

Институт физики металлов Уральского отделения РАН, 620219 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 16 апреля 2002 г.

После переработки 13 июня 2002 г.

Найдены новые типы трехмерных спиральных структур в изотропном ферромагнетике.

PACS: 03.50.–k, 61.30.Cz, 75.10.Hk

Трехмерные точечные дефекты – ежи(точки Блоха)экспериментально обнаружены и подробно теоретически исследованы в нематических жидких кристаллах [1, 2] и ферромагнетиках, где они разделяют два участка линии Блоха с различной магнитной полярностью или разным направлением поворота намагниченности [3]. В материалах с цилиндрическими магнитными доменами(ЦМД) точки Блоха образуются термической активацией или внешним магнитным полем на линии Блоха в областях, где приложенное поле компенсирует поле рассеяния. Зарождение ежей приводит к аннигиляции линий Блоха, необходимых для устойчивости ЦМД в больших полях смещений. Наличие(влияние) точек Блоха наиболее существенно в областях порядка магнитной длины, где обменная энергия значительно превышает энергию анизотропии и магнитостатическую энергию и распределение единичного вектора $\mathbf{m}$ намагниченности $\mathbf{M} = \mathbf{m}M_0$ описывается уравнением Ландау–Лифшица в обменном приближении:

$$[\mathbf{m}, \Delta\mathbf{m}] = 0, \quad \mathbf{m}^2 = 1. \tag{1}$$

Эти же уравнения определяют распределение поля директора в нематических жидких кристаллах (в одноконстантном приближении) и эквивалентны уравнениям n-поля ($D = 3, N = 3$). Конфигурациям типа ежей отвечает (с точностью до поворотов и отражений) частное решение

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

этих уравнений. Топологическая классификация ежей основана на отображении замкнутой поверхности σ (с координатами θ, ϕ, окружающей центр ежа, пространство вырождения – S^2[1] и его топологический заряд(степень отображения) N:

$$N = \frac{1}{4\pi}\int\int(\mathbf{m}[\mathbf{m}_\theta, \mathbf{m}_\phi])d\theta d\phi, \tag{3}$$

равен единице.

В этой работе предъявлена новая процедура интегрирования уравнений (1) и найден широкий класс точных аналитических решений. На этой основе предсказаны новые типы трехмерных структур в ферромагнетике: спиральные и кноидальные ежи.

В угловых переменных Θ, Φ, параметризующих вектор $\mathbf{m} = \{\sin\Theta\cos\Phi, \sin\Theta\sin\Phi, \cos\Theta\}$, уравнения (1) переписываются в следующем виде:

$$\Delta\Theta = \frac{\sin 2\Theta}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2, \quad \boldsymbol{\nabla}(\sin\Theta^2\boldsymbol{\nabla}\Phi) = 0. \tag{4}$$

Используя процедуру, предложенную в [4], положим поле $\Theta(\mathbf{r})$ локально зависящим $\Theta(a(\mathbf{r}))$ от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\Theta''(a) = \sin 2\Theta(a)/2, \tag{5}$$

$$\Delta a = 0, \Delta\Phi = 0, (\boldsymbol{\nabla}a)^2 = (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2, \boldsymbol{\nabla}a\boldsymbol{\nabla}\Phi = 0 \tag{6}$$

для полей $\Theta(a)$, $a(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ следуют уравнения (4). Такой Anzatz приводит, как мы увидим ниже, к широкому классу решений неинтегрируемого уравнения (1), но не исчерпывает полного многообразия решений. Векторные поля $(\boldsymbol{\nabla}a)$ и $(\boldsymbol{\nabla}\Phi)$ являются нормалями к поверхностям $a = \text{const}$ и $b = \text{const}$ и с геометрической точки зрения решение системы (6) определяет две ортогональные гармонические($\Delta a = 0, \Delta\Phi = 0$) координатные поверхности с равными длинами нормалей.

Введем комплексные переменные $X = x + iy$, $Y = x - iy$ и запишем систему (6) в виде двух уравнений

$$4\Omega_{,XY} = \Omega_{,zz}, \quad 4\Omega_{,X}\Omega_{,Y} = \Omega_{,z}^2 \tag{7}$$

[1)]e-mail: Borisov@imp.uran.ru

для комплексной функции $\Omega = a + i\Phi$. Исключение $\Omega_{,z}$ из последнего уравнения и подстановка этого выражения в первое приводит к уравнению первого порядка

$$\Omega_{,XX}\Omega_{,Y}^2 + \Omega_{,YY}\Omega_{,X}^2 - 2\Omega_{,XY}\Omega_{,Y}\Omega_{,X} = 0. \quad (8)$$

Это общековариантное (к преобразованиям $\Omega \to \to f(\Omega)$ с произвольной функцией f) уравнение заменой $\Omega_{,Y} = \Gamma\Omega_{,X}$ сводится к гидродинамическому уравнению типа Хопфа в комплексных переменных. В результате (7) редуцируется в систему уравнений

$$\Omega_{,Y} = \Gamma\Omega_{,X}, \quad \Omega_{,z} = 2i\sqrt{\Gamma}\Omega_{,X}, \quad (9)$$

где поле Γ удовлетворяет замкнутой системе уравнений:

$$\Gamma_{,Y} = \Gamma\Gamma_{,X}, \quad \Gamma_{,z} = 2i\sqrt{\Gamma}\Gamma_{,X}. \quad (10)$$

Последнее уравнение в (10) является условием совместности системы (9). С помощью масштабных преобразований можно показать, что при постоянном значении поля Γ решение системы (9) зависит только от двух пространственных переменных. При $\Gamma \neq \mathrm{const}$ из (9), (10) сразу следует,что поле Ω является аналитической функцией поля Γ:

$$\Omega = F(\Gamma), \quad (10)$$

а поле $\Gamma(X, Y, z)$ определяется решением неявного уравнения

$$G(\Gamma, X + Y\Gamma + 2i\sqrt{\Gamma}z) \quad (12)$$

с произвольной функцией G. Отметим, что прообразу точки ($\Theta = \mathrm{const}$, $\Phi = \mathrm{const}$) на сфере вектора намагниченности отвечает постоянное комплексное число Γ и, следовательно, прямая линия в трехмерном пространстве. Поэтому для найденных решений инвариант Хопфа, определяемый коэффициентом зацепления прообразов двух точек на сфере, равен нулю.

Как и в гидродинамике несжимаемой жидкости решения (11), (12) в общем случае неоднозначны. Далее мы проанализируем многообразие решений, когда поле $\Gamma(X, Y, z)$ определяется уравнением $X + Y\Gamma + 2iz\sqrt{\Gamma} = 0$. В этом случае Ω есть аналитическая функция

$$\Omega = F(\omega), \quad \omega = \tan(\theta/2)\exp\ i\phi \quad (13)$$

(или антианалитическая функция $\Omega = F(\omega^*)$) комплексной переменной ω-стереографической проекции сферы единичного радиуса в трехмерном пространстве ($x = r\sin\theta\cos\phi$, $x = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$). Выберем решение (5) в виде решетки солитонов

$$\cos\Theta = \mathrm{sn}\,(a/k, k), \quad (0 < k < 1). \quad (14)$$

В простейшем (солитонном) случае $\Theta = = 2\arctan[\exp a]$ при $k = 1$. Тогда комплексное поле $\Psi = \tan(\Theta/2)\exp\ i\Phi$ равно $\exp[\Omega]$ и Ψ удовлетворяет уравнению дуальности: $\Phi_{\omega^*} = 0$. При $\Omega = \ln\omega^N$ такие решения описывают ежи с топологическим зарядом N и были получены из соответствующих уравнений дуальности в [5].

В случае $k \neq 1$ зададим Ω потенциалом вихреисточника: $\Omega = a + i\Phi = (\alpha + i\beta)\ln\Omega$ $(\alpha, \beta \in R)$. Тогда решение представляет линейный дефект с сингулярными значениями m_x, m_y вдоль положительной оси $z(\theta \to 0)$. При обходе вокруг линии сингулярностей из требования однозначности намагниченности следует, что изменение поля Φ должно быть равно $2\pi Q$ $(Q \in Z)$), а изменение δa поля a: $\delta a = 4kKS$ ($S \in Z, K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода) определено периодом $4K$ эллиптической функции $\mathrm{sn}(u, k)$.Тогда линейный дефект характеризуется целочисленными значениями S, Q, и выражение для его z – компоненты намагниченности и азимутального угла имеет следующий вид:

$$\cos\Theta = \mathrm{sn}\left(\frac{Q\ln\tan(\theta/2)}{k} - \frac{2SK\phi}{\pi}\right), \quad (15)$$

$$\Phi = Q\phi + \frac{2kK\ln\tan(\theta/2)}{\pi}. \quad (16)$$

Для поля директора в нематике, определенного с точностью до знака, величины Q, S могут одновременно принимать полуцелые значения.

Случаю $S = 0$ соответствует магнитная структура-кноидальный ёж, который состоит из бесконечной совокупности доменов. В шаровых слоях $\theta \in (\theta_p, \theta_{p+1/2}), \phi \in [0, 2\pi]$ ($p \in Z$, $\tan(\theta_p/2) = \exp[4pkK/Q]$) величина m_z принимает положительные значения, и отрицательные в слоях $\theta \in (\theta_{p-1/2}, \theta_p), \phi \in [0, 2\pi]$. В экваториальной плоскости $z = 0$ распределение намагниченности совпадает с планарным вихрем. В плоскостях $z = h = \mathrm{const}$ и вблизи сингулярной нити, где $z \ll R = \sqrt{x^2 + y^2}$, распределение намагниченности соответствует системе кольцевых доменов – двумерной магнитной мишени [4] с $\cos\Theta = \mathrm{sn}(Q\ln(R/2h)/k, k)$ и вихревым характером полей m_x, m_y. График для $\mathbf{m}$ приведен на рис.1. В предельном случае, когда $k \to 1$, $\mathrm{sn}(u) \to \tanh(u)$, шаровой слой $\theta \in (\theta_{-1/4}, \theta_{1/4}), \phi \in [0, 2\pi]$ около экватора покрывает всю сферу и решение принимает простой вид $\Theta = 2\arctan[(\tan(\theta/2))^Q], \Phi = Q\phi$ с топологическим зарядом, равным Q. Энергия $H = \int \nabla\mathbf{m}\nabla\mathbf{m}d^3x$ кноидального вихря расходится при $\theta \to 0$, и интеграл (как и в случае вихревого кольца в сверхтекучей жидкости) должен быть

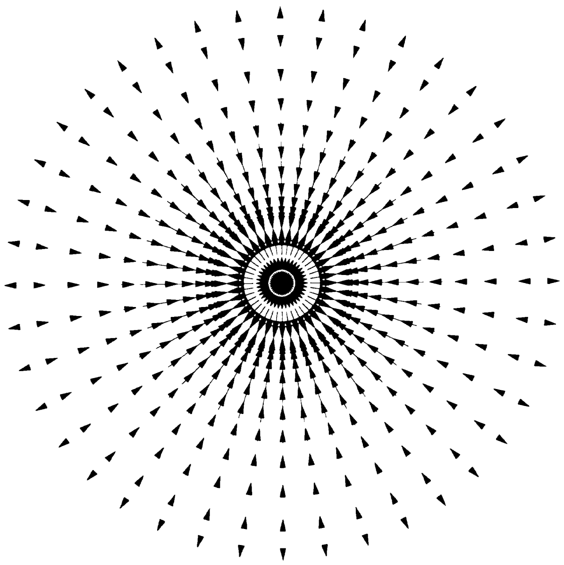

Рис.1. Распределение $\mathbf{m}$ для кноидального ежа с параметрами $Q = 1$, $S = 0$, $k = 1/3$ в плоскости $z = 7$

обрезан на значениях $\theta \sim d/L$, отвечающем атомным расстояниям d. С логарифмической точностью $H = \pi[(1-k^2)/k^2]Q^2 L \ln(L/d)$, где L – размер системы.

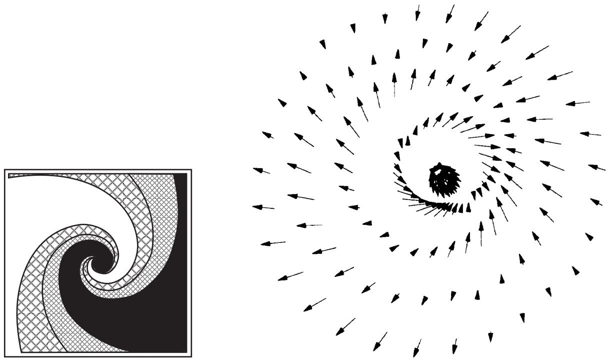

Рис.2. Распределение $\mathbf{m}$ для спирального ежа с параметрами $Q = 1$, $S = 1$, $k = 1/3$ в плоскости $z = 4$. На вставке изображены домены с $0 < \Theta < \pi/4$ (светлая область) и $3\pi/4 < \Theta < \pi$ (темная область)и переходные области $\pi/4 < \Theta < 3\pi/4$

При $S \neq 0$ z – компонента намагниченности принимает постоянное значение $\cos\Theta = \mathrm{sn}(C)$ на винтовых поверхностях: $z = \pm R\mathrm{sh}[2\phi K k S/\pi Q + Ck/Q]$, проходящих через начало координат. Значения $C = 2Kp (p \in Z)$ в таких спиральных ежах разделяют области с противоположными направлениями намагниченности. Ширина доменов увеличивается с увеличением k. Вблизи сингулярной нити, где $z = h = \mathrm{const} \ll R$, поле m_z приближенно равно $\mathrm{sn}(Q \ln \frac{R}{2h}/k - 2K\phi S/\pi, k)$ и представляет S-заходную логарифмическую спираль, качественно совпадающую со спиральным вихрем в двумерном ферромагнетике [4]. Направление закручивания спирали определяется знаком N/S. Графики для $\mathbf{m}$ и m_z для $S = 1$, $S = 2$ при конечных значениях z приведены на рис.2,3.

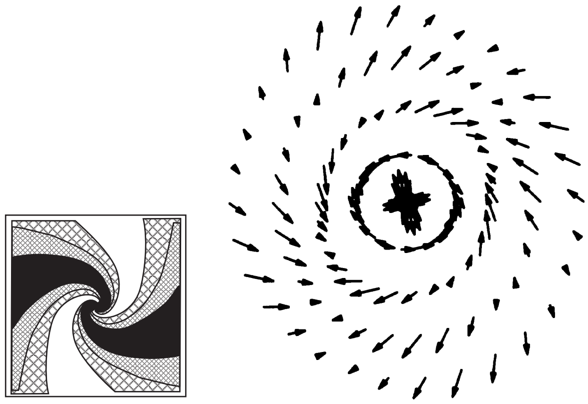

Рис.3. Распределение $\mathbf{m}$ для спирального ежа с параметрами $Q = 1$, $S = 2$, $k = 1/3$ в плоскости $z = 4$

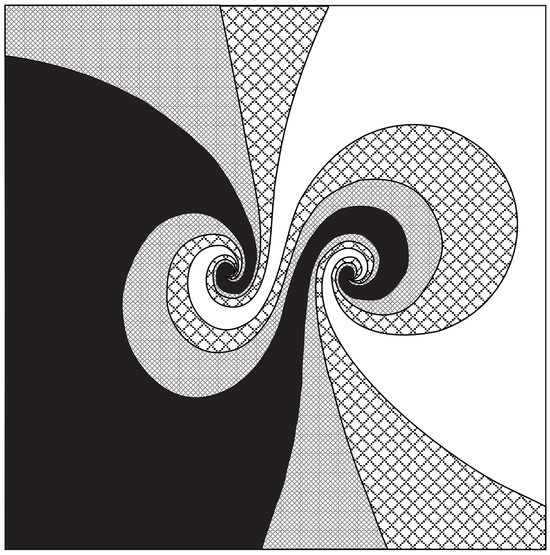

Рис.4. Структура диполя из спиральных ежей с параметрами $Q_1 = -Q_2 = 1$, $S = 2$, $S_1 = -S_2 = 1$, $k = 1/3$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi/6$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ в плоскости $z = 2$

Общее однозначное решение для системы взаимодействующих спиральных ежей

$$\Omega = a + i\Phi = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2ikK}{\pi} S_j + Q_j\right) \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\exp(i\phi) - \right.$$

$$\left. - \tan\frac{\theta_j}{2}\exp(i\phi_j)\right) + w(\omega) \qquad (17)$$

характеризуется произвольной мероморфной функцией $w(\omega)$, параметром k, целочисленными значениями S_j, N_j, произвольными вещественными постоянными θ_j, ϕ_j и содержит набор сингулярных лучей, исходящих из начала координат под углами $\theta_j, \phi_j (j = 1, ...n)$. В плоскостях $z = \text{const}$ оно представляет совокупность S_j-заходных спиралей и при $n = 2$ изображено на рис.4.

Описанные выше спиральные трехмерные структуры могут зарождаться на линейных дефектах немагнитной природы и наблюдаться в тонких магнитных пленках с большим фактором качества и малым значением константы одноосной анизотропии. Влияние последней изменит конфигурацию ежей на больших расстояниях от сингулярной нити.

Автор признателен Е. А. Кузнецову, А. П. Протогенову, А. Б. Шабату за плодотворные обсуждения результатов работы и полезные замечания, участникам сессии Совета РАН по нелинейной динамике за интерес к работе, С. А. Зыкову за помощь в компьютерной графике.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 00-01-00366 и гранта INTAS # 99-1782).

1. Г. Е. Воловик, В. П. Минеев, ЖЭТФ **72**, 2256 (1977).
2. М. В. Курик, О. Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
3. А. Малоземов, Дж. Слонзуски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, М.: Мир, 1979.
4. А. Б. Борисов, Письма в ЖЭТФ **73**, 242 (2001).
5. L. M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Clarendon Press, Oxford, 1999.