

Коллапс в нелинейном уравнении Шредингера критической размерности $\{\sigma = 1, D = 2\}$

Ю. Н. Овчинников⁺, И. М. Сигал^{□1)}

⁺Max-Planck Institute for Physics of Complex System,
D-01187 Dresden, Germany

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117940 Москва, Россия

[□]University of Toronto, Department of Mathematics,
M5S 3G3 Toronto, Ontario, Canada

Поступила в редакцию 27 февраля 2002 г.

В адиабатическом приближении исследованы коллапсирующие решения нелинейного уравнения Шредингера в критической размерности $\{\sigma = 1, D = 2\}$. Получено трехпараметрическое семейство решений для масштабного множителя $\lambda(t)$. Показано, что решение Таланова лежит на сепаратрисе, разделяющей области коллапса и обычного расширения. Сравнение с численными решениями показывает, что слабоколлапсирующие решения являются хорошим начальным приближением к проблеме коллапса.

PACS: 02.30.Jr, 03.65.Ge

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0 \quad (1)$$

в критическом случае ($\sigma = 1, D = 2$) имеет решения различного вида, коллапсирующие за конечное время. Одно из них (точное решение уравнения (1)) было получено Талановым [1]. Второй тип коллапсирующих решений был найден Захаровым [2]. Универсальное поведение решений этого типа нарушается только вблизи точки коллапса, при соответствующем выборе начальных данных [3, 4] (см. также [5, 6]). Но область такого нарушения чрезвычайно узка [7, 8]. В критическом случае $\{\sigma = 1, D = 2\}$ третий тип решений (слабый коллапс) переходит в решение второго типа.

Ниже мы исследуем поведение коллапсирующего решения в предположении, что существует адиабатический параметр. В результате исследования будет показано, что мера реализации решения типа Таланова равна нулю, и тем самым решения этого типа не реализуются в численном эксперименте при начальных данных общего положения.

“Хвост” коллапсирующего решения никогда не является универсальным. Практически универсальной может быть лишь функция в области, в которой она не слишком мала. Мы покажем, что в такой области численный счет [9] с высокой точностью описывается слабоколлапсирующим решением при определенном выборе свободных параметров.

1. Адиабатический подход к коллапсу. Уравнение (1) имеет стационарное решение $\bar{\psi}$, экспоненциально убывающее на бесконечности:

$$\Delta \bar{\psi} + |\bar{\psi}|^2 \bar{\psi} = |E_0| \bar{\psi}; \quad E_0 < 0, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}(|r|). \quad (2)$$

Если $\bar{\psi}$ есть решение уравнения (2), то функция $\hat{\psi}$ такая, что

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{i|E_0|}{\lambda^2}(t - t_0)\right) \bar{\psi}(\rho/\lambda), \quad \rho = |r|, \quad (3)$$

также является решением уравнения (1) при произвольном, не зависящим от времени, значении λ . Это свойство уравнения (1) позволяет воспользоваться адиабатической теорией (адиабатический параметр $\lambda\lambda$) для исследования уравнения (1) (см. [3–5]). И наша цель – получить уравнение на параметр λ . В главном приближении по параметру адиабатичности мы получим ниже нелинейное уравнение третьего порядка для масштабного параметра λ . Уравнение (1) есть уравнение первого порядка по времени t . Следовательно, решение полностью определяется заданием функции ψ в фиксированный момент времени. Это означает, что изменение начального состояния приведет к изменению вида коллапсирующего решения. С этой точки зрения зависимость параметра λ от времени вида $(t_0 - t)^\alpha$ не универсальна и зависит от параметров, связанных с начальной формой функции ψ . Мы покажем, что решение Таланова является сепаратрисой для процесса коллапса и регулярного развития. В результате эффективная мера для этого решения равна нулю, и его нельзя получить при

¹⁾I. M. Sigal.

численном счете. Но существует область начальных данных, приводящих к сжатию состояния до малого, но конечного размера с последующим расширением.

2. Уравнение на масштабный параметр λ .

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\psi = (\lambda^{-1} \bar{\psi}(\rho/\lambda) + \psi_1(\rho/\lambda, t)) \exp \left(i |E_0| \int^t \frac{dt_1}{\lambda^2(t_1)} \right), \quad (4)$$

где $\lambda \equiv \lambda(t)$, а функция $\bar{\psi}$ удовлетворяет уравнению (2). Ниже мы положим

$$x = \rho/\lambda. \quad (5)$$

Подставляя выражение (4) для функции ψ в уравнение (1), получим точное уравнение:

$$\left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1 + \psi_1^2 (2\psi_1 + \psi_1^*) - |E_0| \psi_1 \right\} + \\ + i \lambda^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - i \lambda \dot{\lambda} x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \lambda \bar{\psi} (\psi_1^2 + 2\psi_1 \psi_1^*) + \\ + \lambda^2 \psi_1^2 \psi_1^* - i \dot{\lambda} \bar{\psi} - i \dot{\lambda} x \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где

$$\dot{\lambda} = \partial \lambda / \partial t. \quad (7)$$

Мы воспользуемся адиабатическим приближением и будем рассматривать параметр $\lambda \dot{\lambda}$ как малую величину:

$$\lambda \dot{\lambda} \ll 1. \quad (8)$$

Поправка первого порядка находится легко, и в результате для функции ψ_1 находим следующее представление:

$$\psi_1 = i \bar{\psi} \left(\frac{\dot{\lambda}}{4} x^2 + \beta \right) + \phi + i \psi_3, \quad (9)$$

где $\beta \equiv \beta(t)$ – произвольная функция времени t порядка $\dot{\lambda}$, ϕ – вещественная поправка второго порядка и ψ_3 есть поправка третьего порядка. Функция ϕ может быть найдена из уравнений (6), (9):

$$\phi = \hat{L}^{-1} \left\{ \lambda^2 \bar{\psi} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{4} x^2 + \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) - \right. \quad (10)$$

$$\left. - \lambda \dot{\lambda} x \left(\beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{x \dot{\lambda}}{2} \bar{\psi} + \frac{\dot{\lambda} x^2}{4} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) - \lambda \left(\frac{\dot{\lambda}}{4} x^2 + \beta \right)^2 \bar{\psi}^3 \right\},$$

где оператор \hat{L} определяется выражением

$$\hat{L} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + 3 \bar{\psi}^2 - |E_0|. \quad (11)$$

Отметим, что оператор

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \bar{\psi}^2 - |E_0| \quad (12)$$

имеет нулевую моду $i \bar{\psi}$:

$$\hat{L}_1(i \bar{\psi}) = 0.$$

Следовательно, правая часть уравнения для ψ_3 должна быть ортогональна к функции $\bar{\psi}$. Это условие дает уравнение для функции $\lambda(t)$:

$$\int_0^\infty dx x \bar{\psi} \left\{ \lambda^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \dot{\lambda} x \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2 \lambda \bar{\psi}^2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{4} x^2 + \beta \right) \phi + \right. \\ \left. + \lambda^2 \bar{\psi}^3 \left(\frac{\dot{\lambda}}{4} x^2 + \beta \right)^3 \right\} = 0. \quad (13)$$

Для упрощения этого уравнения воспользуемся следующими точными уравнениями:

$$\hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) \right) = 2 |E_0| \bar{\psi}, \\ \hat{L} \bar{\psi} = 2 \bar{\psi}^3, \quad (14)$$

$$\hat{L}(x^2 \bar{\psi}) = 2x^2 \bar{\psi}^3 + 4 \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}).$$

Используя соотношения (10), (14), приведем уравнение (13) для величины λ к сравнительно простому виду:

$$\frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^2 \beta^2) \int_0^\infty dx x \left(\bar{\psi}^2 - \frac{1}{2 |E_0|} \bar{\psi}^4 \right) + \\ + \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^2 \dot{\lambda} \beta) \int_0^\infty dx x \left\{ \frac{3}{4} (x \bar{\psi})^2 - \frac{1}{2 |E_0|} (\bar{\psi}^2 + x^2 \bar{\psi}^4) \right\} + \\ + \frac{1}{32} (\lambda^2 \dot{\lambda}^3 + \lambda^3 \dot{\lambda} \ddot{\lambda}) \left\{ 10 \int_0^\infty dx x (x^4 \bar{\psi}^2) - \right. \\ \left. - \frac{7}{|E_0|} \int_0^\infty dx x (x \bar{\psi})^4 \right\} - \frac{1}{|E_0|} (\lambda^2 \dot{\lambda}^3 + \frac{11}{8} \lambda^3 \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + \frac{1}{8} \lambda^4 \ddot{\lambda}) \times \\ \times \int_0^\infty dx x (x \bar{\psi})^2 = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) приводят к важным интегральным соотношениям. Из первого уравнения (14) получаем

$$\int_0^{\infty} dx x \bar{\psi} \left\{ \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) \right) - 2|E_0| \bar{\psi} \right\} = 0. \quad (16)$$

С учетом второго из уравнений (14), уравнение (16) принимает вид

$$\int_0^{\infty} dx x \bar{\psi}^3 \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) = |E_0| \int_0^{\infty} dx x \bar{\psi}^2. \quad (17)$$

Интегрирование по частям в левой части уравнения (17) дает первое из соотношений

$$\int_0^{\infty} dx x \bar{\psi}^4 = 2|E_0| \int_0^{\infty} dx x \bar{\psi}^2. \quad (18)$$

Аналогичным образом находим с помощью третьего уравнения (14)

$$\begin{aligned} & 2|E_0| \int_0^{\infty} dx x (x^2 \bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) = \\ & = \int_0^{\infty} dx x \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) \right) \left[2x^2 \bar{\psi}^3 + 4 \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{\psi}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Простые вычисления с использованием уравнения (18) дают второе соотношение:

$$\frac{3}{2}|E_0| \int_0^{\infty} dx (x \bar{\psi})^2 = \int_0^{\infty} dx x \bar{\psi}^2 + \int_0^{\infty} dx x (x^2 \bar{\psi}^4). \quad (20)$$

Уравнения (18), (20) означают, что величина β в рассматриваемом приближении выпадает из уравнения (15). Следующее существенное упрощение уравнения (15) достигается применением точного соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) (x^4 \bar{\psi}) = \\ & = 16x^2 \bar{\psi} + 8x^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + x^4 (|E_0| \bar{\psi} - \bar{\psi}^3). \end{aligned} \quad (21)$$

Умножая обе части уравнения (21) на функцию $(\partial/\partial x)(x \bar{\psi})$ и интегрируя по $x dx$ в интервале $(0, \infty)$, получаем соотношение

$$10|E_0| \int_0^{\infty} dx x (x^4 \bar{\psi}^2) - 7 \int_0^{\infty} dx x (x \bar{\psi})^4 = 32 \int_0^{\infty} dx (x \bar{\psi})^2. \quad (22)$$

Используя уравнения (18), (20), (22), мы приведем уравнение (15) для параметра λ к окончательному виду:

$$\lambda \ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}\dot{\lambda} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) легко интегрируется. В результате первого интегрирования уравнение (23) сводится к уравнению второго порядка с одной произвольной константой C :

$$\ddot{\lambda} = C/\lambda^3. \quad (24)$$

Уравнение (24) также имеет первый интеграл:

$$\dot{\lambda}^2 = -C/\lambda^2 + C_1. \quad (25)$$

Общее решение уравнения (25) с тремя произвольными константами (C, C_1, t^*) есть

$$\lambda = \left[C_1(t^* - t)^2 + C/C_1 \right]^{1/2}. \quad (26)$$

В зависимости от знаков коэффициентов $\{C, C_1\}$ уравнение (26) допускает следующие виды решений:

а) $C > 0$, $C_1 > 0$. Происходит сжатие, система проходит через конечный минимальный размер и затем наступает стадия расширения;

б) $C < 0$, $C_1 > 0$. Возникает коллапс на конечном интервале времени;

в) $C < 0$, $C_1 < 0$. Коллапс возникает после конечного периода расширения;

д) $C = 0$. Возникает решение Таланова – это есть сепаратриса между областями коллапса и расширения. Мера такого события равна нулю.

3. Слабый коллапс. В критическом случае $\{\sigma = 1, D = 2\}$ уравнение (1) имеет также слабоколлапсирующие решения. В этом случае слабоколлапсирующие решения и коллапсирующие решения с параметром $\nu = 1/2$ (см. [8]) совпадают. Слабоколлапсирующие решения имеют вид [8]

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \varphi(\rho/\lambda) \exp(i\chi), \quad (27)$$

где масштабный параметр $\lambda \equiv \lambda(t)$ и фаза χ определяются выражениями

$$\lambda = \frac{\sqrt{t_0 - t}}{C}, \quad \chi = -\frac{C_1}{2} \ln(t_0 - t) + \bar{\chi}(\rho/\lambda). \quad (28)$$

Модуль φ и фаза $\bar{\chi}$ связаны с функцией Z соотношениями

$$\varphi = \sqrt{Z'} / \sqrt{y}, \quad \bar{\chi}' = -y/4C^2, \quad y = \rho/\lambda, \quad (29)$$

где $\{C, C_1\}$ – некоторые константы.

В рассматриваемом случае $\{\sigma = 1, D = 2\}$ функция Z сама является решением обыкновенного дифференциального уравнения:

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{Z'}{2y^2} + \frac{1}{C^2} \left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1 \right) Z' + \frac{2(Z')^2}{y} = 0. \quad (30)$$

Полагая

$$Z' = \phi, \quad (31)$$

получим уравнение второго порядка для функции ϕ :

$$\phi'' - \frac{(\phi')^2}{2\phi} + \frac{\phi}{2y^2} + \frac{1}{C^2} \left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1 \right) \phi + \frac{2\phi^2}{y} = 0. \quad (32)$$

При малых значениях y находим из этого уравнения

$$\phi = A \left\{ y + \left(\frac{C_1}{4C^2} - \frac{A}{2} \right) y^3 + \frac{y^5}{128} \left(-\frac{1}{C^4} + \left(\frac{C_1}{C^2} - 2A \right) \left(3\frac{C_1}{C^2} - 10A \right) \right) + \dots \right\}. \quad (33)$$

В области $y \rightarrow \infty$ общее решение уравнения (32) представимо в виде

$$\phi = B\phi_0 \left[1 + \sin \left(\frac{1}{2C^2} \int \frac{dy}{\phi_0} \right) \right] + \phi_1, \quad (34)$$

где функция ϕ_0 есть решение линейного уравнения

$$\phi_0''' + \frac{\phi_0'}{y^2} - \frac{\phi_0}{y^3} + \frac{2\phi_0}{C^2} \left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1 \right) + \frac{y}{4C^4} \phi_0 = 0, \quad (35)$$

имеющего асимптотику на бесконечности вида

$$\phi_0 = \frac{1}{y} \left\{ 1 + \frac{4C_1C^2}{y^2} + \frac{8C^4(3C_1^2 - 1)}{y^4} + \frac{32C_1C^6(5C_1^2 - 7)}{y^6} + \dots \right\}. \quad (36)$$

Функция ϕ_1 мала и может быть найдена по теории возмущений. Мы не будем приводить её здесь.

С помощью подстановки

$$\phi = y\varphi^2 \quad (37)$$

уравнение (32) сводится к уравнению, описывающему коллапс с $\nu = 1/2$ (см. [8]).

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{y} + \frac{y^2\varphi}{16C^4} - \frac{C_1}{2C^2}\varphi + \varphi^3 = 0. \quad (38)$$

При $C \rightarrow \infty$ и фиксированном значении $\varphi(0)$ (см. (2), (3)) существует конечное значение C_2 такое, что при значении $C_1/C^2 = 2A + C_2$ функция φ убывает экспоненциально на бесконечности. Численное решение уравнения (38) дает следующие значения параметров $\{\varphi(0), C_2\}$:

$$\varphi(0) = 1.6, \quad C_2 = -4.0682. \quad (39)$$

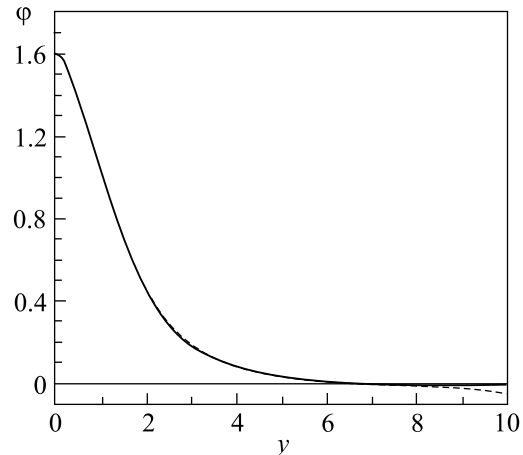


Рис.1. Функция φ , соответствующая наборам параметров $\{A, C, C_1, C_2\}$: сплошная линия соответствует набору $\{A = \varphi(0)^2 = 1.6^2, C \rightarrow \infty, C_2 = -4.0682, C_1/C^2 = 2A + C_2\}$; штриховая линия соответствует набору $\{A = 1.6^2, C = 2, C_2 = -4.041, C_1/C^2 = 2A + C_2\}$

На рис.1 приведены значения функции φ на интервале $y = [0, 10]$, соответствующие двум наборам параметров $\{A, C, C_1, C_2\}$: сплошная линия соответствует набору $\{A = \varphi^2(0) = 1.6^2, C \rightarrow \infty, C_2 = -4.0682, C_1/C^2 = 2A + C_2\}$, штриховая – набору $\{A = 1.6^2, C = 2, C_2 = -4.041, C_1/C^2 = 2A + C_2\}$.

На рис.2 приведен профиль решения $|U|$, полученного численно в работе [9]. Отметим, что предельная функция φ ($C \rightarrow \infty$) отличается от функции $|U|$ лишь при больших значениях y , то есть в области, где обе функции малы и функция $|U|$ не универсальна. Численный счет показывает также, что в области $C \geq 1$ существует узкая область значений C_2 (в окрестности точки -4.0682), в которой слабоколлапсирующее решение очень мало отличается от предельной функции $\varphi(C \rightarrow \infty)$ при $y < 6 - 7$. Это обстоятельство, по-видимому, может быть использовано при построении многопараметрического коллапсирующего решения.

В адиабатическом приближении нами получено нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для масштабного множителя $\lambda(t)$, определяющего временную зависимость решений нелинейного

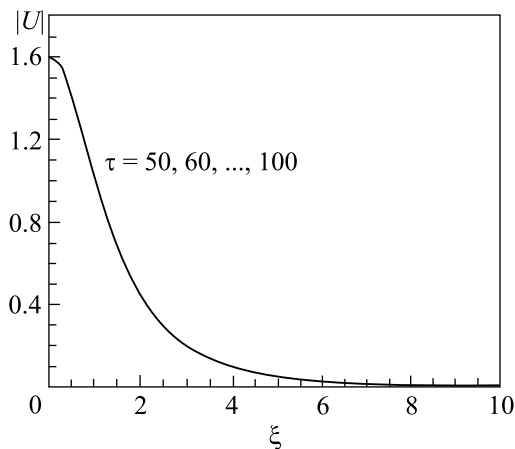


Рис.2. Профиль решения $|U|$ на интервале $(0, 10)$, полученный численно в работе [9], при значении $|U(0)| = 1.6$

уравнения Шредингера. Семейство решений содержит как коллапсирующее за конечное время решение, так и решения, приводящие к сжатию до малого, но конечного размера с последующим расширением. Показано, что решение Таланова лежит на сепаратрисе, разделяющей области коллапса и обычного регулярного поведения.

Из уравнения (18) следует, что полная энергия ϵ стационарного состояния (2) равна нулю:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int d^2 r \left\{ |\nabla \bar{\psi}|^2 - \frac{1}{2} |\bar{\psi}|^4 \right\} = 0.$$

При использовании нелинейного уравнения Шредингера с притяжением в задачах физики твердого тела необходимо иметь в виду, что это уравнение является приближенным и выводится в некоторых предположениях, которые и определяют его область применимости. Во всяком случае степень сжатия, определяемая параметром $\lambda(t)^{-1}$, не может быть бесконечной и ограничена сверху. Само ограничение зависит от конкретной физической задачи.

Работа одного из авторов (Ю.Н.О.) поддержана CRDF (USA), грант # RP1-2251, а также Российским фондом фундаментальных исследований грант # 00-02-17729.

1. V. I. Talanov, JETP Lett. **11**, 199 (1971).
2. V. E. Zakharov, ZhETP **62**, 1746 (1972); JETP **35**, 908 (1972).
3. G. M. Fraiman, JETP **61**, 228 (1985).
4. M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, Phys. Rev. **A38**, 3837 (1988).
5. A. I. Smirnov and G. M. Fraiman, Physica **D52**, 2 (1991).
6. D. Pelinovskii, Physica **D119**, 301 (1998).
7. G. Perelman, CRM Proc. and Lecture Notes **27**, 147 (2001).
8. Yu. N. Ovchinnikov and I. M. Sigal, JETP **89**, 35 (1999).
9. Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Focusing and wave Collapse*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1999.