

О коллапсе волновых пакетов в среде с нормальной дисперсией групповой скорости

Н. А. Жарова¹⁾, А. Г. Литвак, В. А. Миронов

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 5 апреля 2002 г.

После переработки 25 апреля 2002 г.

Предложено решение проблемы реализации коллапса трехмерных волновых пакетов в нелинейных средах с нормальной дисперсией групповой скорости. Показано, что у волновых пакетов с подчеркнутой гиперболической топологией имеет место коллапс, то есть неограниченное нарастание поля вблизи оси системы. В частности, волновой коллапс трубчатых аксиально-симметричных пакетов реализуется в результате концентрации к оси сжимающегося кольцевого распределения поля. Исследована стабилизация коллапса вследствие насыщения нелинейности или нелинейной диссипации, приводящих к ограничению роста поля и дроблению пакета в продольном направлении.

PACS: 42.25.Bs, 42.65.-k

Дисперсия групповой скорости лазерного импульса в конденсированных средах, как правило, является нормальной. Это обстоятельство (отрицательность производной $\partial v_{gr}/\partial \omega < 0$) приводит к заметной модификации уравнения для амплитуд огибающей волнового пакета, описывающего динамику самовоздействия лазерного излучения [1]. В безразмерных переменных соответствующее уравнение является нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) с гиперболическим пространственным оператором [1–9]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (1)$$

Здесь ψ – комплексная амплитуда огибающей электромагнитного поля волны $E = E_{NL} \psi(z, x, y, \tau) \times \exp(i\omega t - ikz)$, распространяющейся вдоль оси z с групповой скоростью $v_{gr} = (dk/d\omega)^{-1}$, E_{NL} – характерное нелинейное поле, $\tau = (t - z/v_{gr}) \times k^{3/2} c^2 / (\omega |\partial v_{gr}/\partial \omega|^{1/2})$, безразмерные эволюционная переменная z и поперечные координаты x, y связаны с соответствующими размерными z_e, x_{tr}, y_{tr} соотношениями $z = kz_e/2$, $(x, y) = k(x_{tr}, y_{tr})$, k – волновое число, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Уравнение (1) широко используется для описания самовоздействия волновых полей (верхнегибридных, циклотронных и др.) в замагниченной плазме [2, 9–11].

Как и стандартное НУШ с эллиптическим оператором, уравнение (1) имеет ряд интегралов, среди

которых наиболее важными являются интеграл энергии I и гамильтониан H

$$I = \int |\psi|^2 d\mathbf{r} d\tau, \quad (2)$$

$$H = \int (|\nabla_{\perp} \psi|^2 - |\psi_{\tau}|^2 - |\psi|^4/2) d\mathbf{r} d\tau. \quad (3)$$

Гамильтониан системы H отражает особенности самовоздействия волновых полей в рамках уравнения (1), связанных с конкуренцией процессов в продольном и поперечном направлениях. Качественное исследование динамики самовоздействия в безаберрационном приближении и на основе метода моментов не дали, в отличие от эллиптического НУШ, убедительного доказательства существования коллапса в системе, но и не исключили такой возможности [2, 8–10]. Численное рассмотрение процессов подтвердило, что основным препятствием на пути неограниченного поперечного сжатия волнового пакета является его неустойчивость, приводящая к дроблению импульса в продольном направлении. В то же время очевидно существование специфического для рассматриваемого гиперболического НУШ класса распределений поля, для которых дифракционные и дисперсионные процессы компенсируют друг друга ($|\nabla_{\perp} \psi|^2 \simeq |\psi_{\tau}|^2$). Для таких распределений, как видно из (3), роль нелинейных процессов усиливается. Аналитическое и численное исследования в двумерном случае ($\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$) эволюции подковообразных распределений поля подтверждают этот вывод [13]. Более заметного усиления нелинейных эффектов естественно ожидать в трехмерном случае. Оче-

¹⁾e-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

видно, коллапс реализуется, если самофокусировочное сжатие к оси системы происходит быстрее, чем развивается “неустойчивость дробления”.

В предлагаемой работе рассмотрена эволюция аксиально-симметричных волновых структур, проведено аналитическое исследование динамики трехмерных подковообразных начальных распределений волнового поля. В некоторых упрощающих предположениях исследование показывает, что распределение волнового поля такого вида обужается и смещается к оси системы (оси z). В автомоделном процессе “падения на центр” амплитуда поля обращается в бесконечность, то есть имеет место коллапс. Результаты численного исследования динамики приведены для более реального распределения поля – трубчатого волнового пучка, который в процессе эволюции выходит на автомоделный режим.

1. Прежде всего обратим внимание на то, что уравнение (1) для функции, зависящей от автомоделной переменной $\eta = \sqrt{r^2 - \tau^2}$, имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4)$$

Это уравнение описывает “сферически-симметричный” коллапс [13, 14]. Этот коллапс является распределенным и отличается от хорошо известного режима самофокусировки аксиально-симметричных пучков тем, что возникающая сингулярность является протяженной по z . Чтобы воспользоваться известным результатом [13, 14], отметим следующее. В рассматриваемом нами случае поле является локализованным вдоль гипербол $\eta_0^2 = r^2 - \tau^2$ и, следовательно, “точка”, в которой возникает особенность, представляет собой поверхность конуса $|\tau| = r$. Внутри конуса ($|\tau| > r$) динамика соответствующего автомоделного распределения поля $\psi = \psi(z, \sqrt{\tau^2 - r^2})$ описывается уравнением вида (4), но с дефокусирующей нелинейностью, то есть со знаком минус перед нелинейным членом.

Для исследования эволюции начальных распределений, локализованных вблизи гиперболоидов $\eta^2 = r^2 - \tau^2$, удобно перейти к новым переменным

$$\zeta = (r^2 - \tau^2)/4, \quad \tau = \tau. \quad (5)$$

Такое преобразование позволяет исследовать эволюцию четного по τ распределения волнового поля как в области с фокусирующей нелинейностью (вне конуса, $|\tau| < r$, что соответствует $\zeta > 0$), так и в “дефокусирующей” области, где дисперсия преобладает над дифракцией (внутри конуса, $|\tau| > r$, или $\zeta < 0$). Для определенности будем рассматривать динамику самовоздействия в полупространстве $0 < \tau < \infty$,

$0 < r < \infty$ (в новых переменных $0 < \tau < \infty$, $-\infty < \zeta < \infty$). Преобразование уравнения (1) и некоторые упрощения удобно провести, используя вариационный подход. Действие с плотностью лагранжиана в переменных (5) имеет вид

$$S = \int \left(\frac{i}{2} (\psi \psi_z^* - \psi^* \psi_z) + \zeta \left| \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{\tau}{2} (\psi_\zeta^* \psi_\tau + \psi_\zeta \psi_\tau^*) - \frac{|\psi|^4}{2} \right) d\zeta d\tau. \quad (6)$$

Предположим сначала, что в процессе эволюции волновой пучок сохраняет гауссову форму вдоль τ :

$$\psi = \frac{u(\zeta, z)}{\sqrt{b}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2b^2}\right), \quad (7)$$

и проведем соответствующее упрощение плотности лагранжиана. Используя выражение для укороченного действия, можно получить уравнение Эйлера, описывающее эволюцию волнового поля по “гиперболам”:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{|u|^2 u}{2b\sqrt{2}} = 0. \quad (8)$$

Видно, что при таком подходе удалось выделить явно основную особенность рассматриваемой задачи, связанную с компенсацией дифракции нормальной дисперсией среды на поверхности конуса $r = |z|$. В области с $\zeta > 0$ дисперсионный член в (8) положителен и возможна самофокусировка волнового поля. При $\zeta < 0$ дисперсионный член отрицателен и уравнение (8) описывает самодифокусировку. На границе смены характера самовоздействия ($\zeta = 0$) дисперсионный член обращается в нуль.

Используя интегралы системы (2), (3), можно найти уравнение движения центра масс $\rho(z) = \int \zeta |u|^2 d\zeta / I$ волнового поля

$$d^2 \rho / dz^2 = 2H / I, \quad (9)$$

где в новых переменных (5)

$$H = \int \left(\zeta \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|^2 - \frac{u^4}{2b\sqrt{2}} \right) d\zeta.$$

Отсюда в наиболее интересном случае отрицательного гамильтониана ($H < 0$) центр масс волнового пакета, сосредоточенного в фокусирующей области ($\rho \geq 0$), “ускоряется” к границе смены режимов самовоздействия, пересекает границу и оказывается в “дефокусирующей” области ($\rho < 0$), где продолжает двигаться с тем же темпом ускорения.

Минимизируем функцию действия (6) на классе пробных функций (7), локализованных вблизи центра масс, вида

$$u(\zeta, t) = \frac{u_0}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{(\zeta - \rho)^2}{2a^2} + i\phi(\zeta - \rho)^2\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6) и интегрируя по ζ , найдем укороченное действие и уравнение движения

$$\rho a_{zz} - a_z \rho_z = \frac{\rho^3}{a^3} - \frac{\rho^2 u_0^2}{4a^2 b}, \quad (11)$$

описывающее изменение характерного размера области локализации волнового поля $a(z)$ в процессе эволюции системы.

Вблизи границы, на которой дисперсия меняет знак ($\zeta \simeq 0$), приближенное решение уравнений (9), (11) с $H < 0$ имеет вид

$$\rho \approx 2(\rho_0 |H|/I)^{1/2} (z_0 - z), \quad (12)$$

$$a \approx \frac{1}{8} \left(\frac{u_0^2}{b}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{a_0}\right)^{1/6} (z_0 - z), \quad (13)$$

где ρ_0 – начальное положение центра масс, значение эволюционной координаты $z = z_0 = (\rho_0 I/|H|)^{1/2}$ соответствует пересечению центром масс границы $\zeta = 0$. Это означает, что по мере приближения центра масс к границе смены режима самовоздействия (фокусировки на дефокусировку) амплитуда поля обращается в бесконечность по закону

$$\psi(\zeta \rightarrow 0, z \rightarrow z_0) \approx (z_0 - z)^{-1/2}. \quad (14)$$

2. Описанная выше картина самовоздействия подтверждается численным исследованием динамики начальных распределений гауссовой формы, локализованных вблизи гипербол $r^2 - \tau^2 = a_r^2$. Для стабилизации коллапса и исследования дальнейшей эволюции системы использованы ставшие уже общепринятыми модельные способы регуляризации исходного уравнения (1). Они связаны с учетом насыщения нелинейности или нелинейного поглощения излучения в сильных полях

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left(\frac{|\psi|^2}{1 + |\psi|^2/\psi_s^2} + i\delta |\psi|^8 \right) \psi = 0, \quad (15)$$

где ψ_s – поле насыщения нелинейности, δ – параметр нелинейной диссипации. На основе уравнения (15) рассмотрим эволюцию начального распределения вида

$$\psi = \psi_0 r^4 / a_r^5 \exp[-r^2/2a_r^2 - \tau^2/2a_\tau^2]. \quad (16)$$

Распределение (16) моделирует структуру поля трубчатого пространственно ограниченного электромагнитного импульса. Следует ожидать, что на начальном этапе эволюции распределение (16) должно трансформироваться в подковообразное распределение типа (7). Этот процесс можно рассматривать как изгибную неустойчивость однородного волнового пучка [9]. Хорошо известно, что однородные по τ трубчатые волновые пучки с мощностью, превышающей критическую, сжимаются в поперечном направлении и самофокусируются к оси τ . Поэтому можно ожидать, что в неоднородном (по τ) распределении типа (16) центральная часть ($\tau \approx 0$) будет фокусироваться к оси ($r = 0$) быстрее, чем периферийная ($\tau \sim a_\tau$).

Численные расчеты подтверждают сделанный прогноз. Для определенности рассмотрим сначала неконсервативный случай на основе уравнения (15) с полем насыщения $\psi_s \rightarrow \infty$, затем приведем дополнительные результаты, относящиеся к консервативной стабилизации коллапса ($\delta = 0$). Значения параметров выбирались следующими: $a_r = 2$, $a_z = 12$.

Результаты численного расчета представлены на рис.1. Видно, что довольно продолжительное время

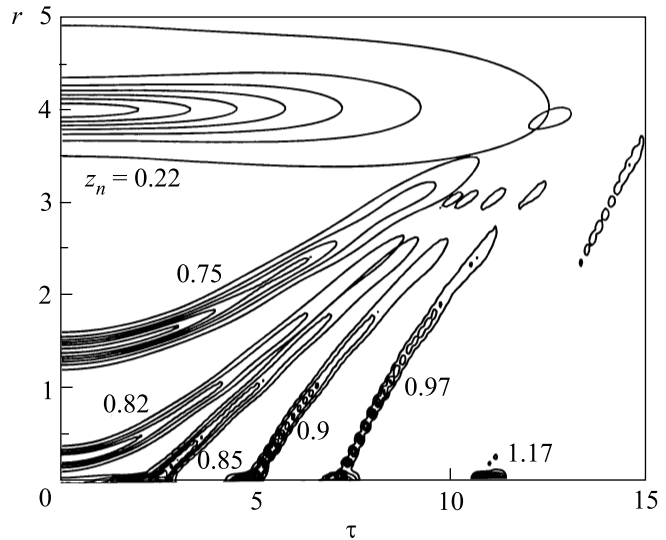


Рис.1. Эволюция аксиально-симметричного полого волнового пучка на трассе распространения z в случае диссипативной стабилизации коллапса при $\delta = 2 \cdot 10^{-8}$. Изображены линии уровня поля $|\psi(r, \tau, z = z_n)|$ при указанных на рисунке значениях z_n

занимает самофокусировка волнового пучка, которая происходит без изменения характерного радиуса полого распределения поля (16). На следующем этапе следует отметить формирование подковообразной

структуры. Этот процесс сопровождается развитием неустойчивости дробления. Однако в рассматриваемом нами случае, в отличие от двумерного [13, 14], она не играет заметной роли и стабилизируется смещением подковообразного распределения к оси системы. В процессе “падения на центр” импульс дробится пополам. Максимальная амплитуда поля в фокальной области остается практически постоянной в течение довольно длинной эволюции волнового поля (см. рис.2), причем области сильного поля проходят

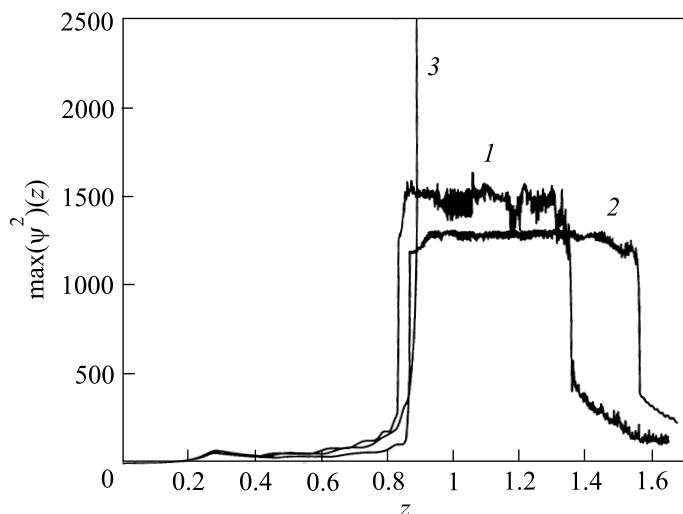


Рис.2. Зависимость квадрата максимальной амплитуды поля $|\psi|^2$ от z . Кривые 1 и 2 относятся к диссипативной стабилизации коллапса при значениях параметра $\delta = 2 \cdot 10^{-8}$ и $\delta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Кривая 3 описывает динамику консервативной системы с полем насыщения нелинейности $\psi_s = 20$

расстояния, существенно превышающие продольную длину импульса, без заметного изменения пространственной структуры. Нелинейное поглощение энергии пакета при прохождении через область коллапса (см. рис.2 и 3) составляет около 50%.

В консервативном случае картина “падения на центр” во многом аналогична. Отличие состоит в том, что возникает отражение от области формирования особенности. При выбранных параметрах распределение амплитуды поля имеет резкий максимум на оси со значением, заметно превышающим соответствующее значение в диссипативном случае (см. рис.2). Несколько возрастает и время формирования области сильного поля (рис.2).

В целом моделирование показывает, что расплывание подковообразного распределения в продольном направлении практически не сказывается на динамике образования сингулярности. Однако очевидно, что в режиме “падения на центр” периферийная часть

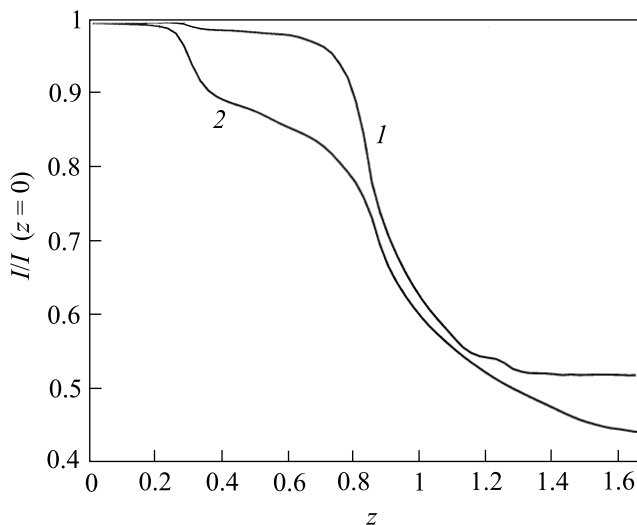


Рис.3. Диссипация энергии волнового пакета в процессе коллапса при параметрах, соответствующих кривым 1 и 2 на рис.2

волнового пакета достигнет оси системы на более поздних временах и способствует поддержанию поля на высоком уровне в течение всего времени взаимодействия. В этом смысле рассмотренный тип коллапса следует отнести к распределенным.

Мы рассмотрели новый сценарий динамики самовоздействия аксиально-симметричного волнового пакета в системе, описываемой нелинейным уравнением Шредингера с гиперболическим пространственным оператором. Определен класс начальных распределений волнового поля, эволюция которых позволяет проиллюстрировать специфические особенности исследуемого уравнения (1). В конкуренции процессов самофокусировочного сжатия и дисперсионного расплывания волнового поля по ортогональным направлениям преобладающим для этих начальных условий оказывается самофокусировка. Она приводит к обужению трубчатых волновых пакетов в поперечном направлении, формированию подковообразной структуры, смещению волнового поля к оси системы, что в конечном счете (в силу цилиндрической симметрии задачи) создает режим коллапса. Он во многом аналогичен сферически-симметричному процессу в НУШ с эллиптическим пространственным оператором. Специфика коллапса состоит в том, что дробление волнового пакета в центре системы сопровождается формированием двух областей сильного поля (“горячих” точек), которые двигаются в разные стороны.

Довольно очевидной представляется перспективность использования таких бегущих фокусов, например, для создания каналов в конденсированных сре-

дах и искусственных фотонных кристаллов, с целью применения таких структур в дальнейшем для ускорения заряженных частиц и преобразования частоты излучения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 02-02-17277 и грант # 01-02-17388).

-
1. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. ВУЗов, Радиофизика **10**, 539 (1967).
 2. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова и др., Письма в ЖЭТФ **44**, 12 (1986), JETP Lett. **44**, 13 (1986); Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова и др., Изв. ВУЗов, Радиофизика **29**, 1137 (1986).
 3. J. E. Rothenberg, Opt. Lett **17**, 583 (1992).
 4. P. Chernev and V. Petrov Opt. Lett **17**, 172 (1992); Opt. Commun. **87**, 28 (1992).
 5. G. G. Luther, A. C. Newell, and J. V. Moloney, Physica **A49**, 4085 (1994); G. G. Luther, A. C. Newell, J. V. Moloney et al., Opt. Lett. **19**, 789, 862 (1994).
 6. J. E. Ranka, R. W. Schrimmer, and A. L. Gaeta, Phys. Rev. Lett. **77**, 3783 (1996).
 7. A. A. Zozulya et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 1430 (1999); A. A. Zozulya et al., Phys. Rev. **A58**, 3303 (1998).
 8. L. Berge and J. J. Rasmussen, Phys. Plasmas **3**, 824 (1996); L. Berge, J. J. Rasmussen, E. A. Kuznetsov et al., J. Opt. Soc. Am. **B20**, 1879 (1996); L. Berge, E. A. Kuznetsov, and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. **E53**, R1340 (1996); G. Fibich, V. M. Malkin, and G. C. Papanicolaou, Phys. Rev. **A52**, 4218 (1995).
 9. K. Germaschewski, R. Grauer, L. Berge et al., Physica **D151**, 175 (1991).
 10. А. Г. Литвак, Т. А. Петрова А. М. Сергеев, А. Д. Юнаковский, Физика плазмы **9**, 495 (1983); А. Г. Литвак, А. М. Сергеев, Н. А. Шахова, Письма в ЖТФ **5**, 862 (1979).
 11. J. R. Muga and C. S. Liu, Phys. Fluids **23**, 2258 (1980).
 12. А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Э. М. Шер, ЖЭТФ **118**, вып. 6, 1463 (2000); A. G. Litvak, V. A. Mironov, and E. V. Sher, Phys. Rev. **E61**, 891 (2000).
 13. С. Н. Власов, Л. В. Пискунова, В. И. Таланов, ЖЭТФ **95**, 1945 (1989); С. Н. Власов, ИЗВ. ВУЗов, Радиофизика **42**, 468 (1999).
 14. В. Е. Захаров, Н. Е. Косматов, В. Ф. Швец, Письма в ЖЭТФ **49**, 431 (1989); В. М. Малкин, Письма в ЖЭТФ **48**, 603 (1988).