Письма в ЖЭТФ, том 31, вып.7, стр. 410 – 412 *5 апреля 1980 г.*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛОИСТОЙ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ИЗИНГА

Л.И.Глазман, В.М.Цукерник

Вычислена свободная энергия изинговской модели с тремя независимыми константами связи I_1, I_2, I_3 соответственно вдоль столбцов и строк с номерами различной четности. Проанализированы низкотемпературные свойства модели при различных соотношениях между I_1, I_2, I_3 и условия существования фазового перехода.

Вопрос о существовании фазового перехода в спиновых стеклах вызвал интерес к системам, содержащим фрустрации. Одной из таких систем является нечетная модель [1] Изинга, допускающая точное решение. В работе [2] рассмотрено обобщение нечетной модели, названное авторами [2] моделью "сложенного домино" ("piled up dominoes"). В этой модели константы связи в столбцах (I_1) и в строках с номерами одной четности (I_2) равны друг другу: $I_1 = I_2 = I$, а константа связи в строках с номерами другой четности (I_3) может отличаться от I.

В настоящем сообщении приведены результаты для слоистой решетки с тремя произвольными константами: I_1 в столбцах, I_2 и I_3 в строках. Показано, что фазовый переход отсутствует при любом значении I_1, если только $I_2 = I_3$, и рассмотрены низкотемпературные свойства модели, которые существенно зависят от соотношений между I_1, I_2, I_3. Нетрудно видеть, что при помощи преобразования Маттиса (одновременного изменения знаков некоторых констант и спиновых переменных в подрешетке) любую систему описанного вида можно свести к решетке, константы связи в которой удовлетворяют следующим условиям:

$$I_1 \geqslant 0; \; I_2 \geqslant |I_3| \geqslant 0. \tag{1}$$

В дальнейшем неравенства (1) предполагаются выполненными. Для вычисления свободной энергии, как и в [2], мы использовали метод матрицы перехода [3]. Наибольшее собственное значение матрицы перехода оказывается пропорциональным $\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_p \epsilon_p\right\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\epsilon_p = \operatorname{ch}2(K_2+K_3) - \operatorname{sh}2(K_2+K_3)\operatorname{sh}4\widetilde{K}_1\cos p\, - \\ - 2\operatorname{sh}^2 2\widetilde{K}_1 \operatorname{sh}2K_2 \operatorname{sh}2K_3 \sin^2 p. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $K_i = I_i\beta$ $(i = 1, 2, 3)$, $\operatorname{th}\widetilde{K}_1 = e^{-2K_1}$, $0 \leqslant p \leqslant \pi$. Величина ϵ_p обращается в нуль только в одной точке (0 или π) при температуре $T_c = 1/\beta_c$, определяемой условием

$$\operatorname{sh}2I_1\beta_c \operatorname{sh}|I_2 + I_3|\beta_c = 1. \tag{3}$$

Из (3) следует, что при $I_2 + I_3 \to 0$ температура фазового перехода $T_c \to 0$ независимо от величины константы I_1. Удельная свободная энергия f может быть записана следующим образом:

$$f = -T\left\{\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{1}{4\pi^2}\int\int_0^{\pi} dp\,dx\,\ln[\operatorname{ch}2(K_2+K_3)\operatorname{sh}^2 2K_1 - \right.$$

$$-\operatorname{sh}^2 2K_1\cos x - 2\operatorname{sh}2(K_2+K_3)\operatorname{ch}2k_1\cos p +$$

$$\left. + 2(\operatorname{ch}2(K_2+K_3) - \operatorname{sh}2K_2\operatorname{sh}2K_3\sin^2 p)]\right\}. \qquad (4)$$

При $I_1 = I_2$ выражение (4) может быть сведено к соответствующему выражению работы [2]. При $I_2 = I_3$ (4) переходит в свободную энергию $f_J\{K_1, K_2\}$ прямоугольной модели Изинга. В случае $I_3 = 0$ свободная энергия может быть выражена через f_J :

$$f = -\frac{T}{4}\ln(4\operatorname{ch}2K_1) + \frac{1}{2}f_J\{K_1^*, K_2\},$$

где $\operatorname{sh}2K_1^* = \operatorname{sh}^2 2K_1/2\operatorname{ch}2K_1$. При $I_2 = -I_3$ выражение для f симметрично по K_1 и K_2:

$$f = -T\left\{\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{1}{4\pi^2}\int\int_0^{\pi} dp\,dx\,\ln[\operatorname{ch}^2 2K_1 + \operatorname{ch}^2 2K_2 - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh}^2 2K_1\cos x - \operatorname{sh}^2 2K_2\cos p]\right\}. \qquad (5)$$

Симметрия выражения (5) связана с тем, что при помощи преобразования Маттиса можно перейти от решетки с константами $I_1, I_2, -I_2$ к решетке с константами $I_2, I_1, -I_1$.

Представим функцию $\phi(T) = -T^{-1}f$ (f определяется выражением (4)) в следующем виде:

$$\phi(T) = -T^{-1}\epsilon_0 + s_0 + g(T),$$

где ϵ_0 и s_0 – удельные энергия и энтропия при $T = 0$; $g(T) \to 0$ при $T \to 0$. В случае $I_2 \neq -I_3$ низкотемпературное разложение функции $g(T)$ представляет собой ряд экспонент с показателями вида $-\epsilon_i/T$. Если же $I_2 = -I_3$, то в разложении $g(T)$, помимо чисто экспоненциальных членов, содержатся слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{T}\exp\left\{-\frac{\epsilon_i}{T}\right\}$.

В таблице представлены величины, связанные с тремя первыми слагаемыми в низкотемпературном разложении $\phi(T)$: главный член асимптотики удельной теплоемкости c (в предположении $\frac{|I_1 - I_2|}{I_1} << 1$, $\frac{|I_1 + I_3|}{I_1} << 1$), ϵ_0 и s_0. (Формулы, отмеченные звездочкой, содержатся в [2]). Простое комбинаторное рассмотрение показывает, что если $I_2 = -I_3 \neq I_1$ или $-I_3 > I_2$, то полная энтропия S_0 решетки при $T = 0$ порядка $\sqrt{N}\ln 2$ (N – число узлов в решетке), а $s_0 = 0$. Обратим внимание на то, что в основном состоянии энергия в модели с $-I_3 > I_1$ есть сумма энергий одномерных изинговских цепочек с константами связи I_2 и I_3. В то же время при $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq -I_3$ в такой модели есть фазовый переход.

Соотношения между константами связи	c	ϵ_0	s_0
$I_1, I_2 > -I_3$ ($T_c \neq 0$)	$8\left[\frac{I_1+I_3}{T}\right]^2 \exp\left\{-\frac{4(I_1+I_3)}{T}\right\}$	$-\frac{2I_1+I_2+I_3}{2}$	0
$I_2 > -I_3 > I_1$ ($T_c \neq 0$)	$\left[\frac{I_1+I_3}{T}\right]^2 \exp\left\{\frac{2(I_1+I_3)}{T}\right\}$	$-\frac{I_2-I_3}{2}$	0
$I_2 > -I_3 = I_1$ ($T_c \neq 0$)	$\frac{8}{5\sqrt{5}}\left[\frac{I_1-I_2}{T}\right]^2 \exp\left\{\frac{4(I_1-I_2)}{T}\right\}$	$-\frac{I_2-I_3}{2}$	$\frac{1}{4}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *
$I_2 = -I_3 > I_1$ ($T_c = 0$)	$\frac{4}{\pi}\left[\frac{I_1+I_3}{T}\right]^2 \exp\left\{\frac{2(I_1+I_3)}{T}\right\}$	$-I_2$	0
$I_1 > I_2 = -I_3$ ($T_c = 0$)	$\frac{4}{\pi}\left[\frac{I_1+I_3}{T}\right]^2 \exp\left\{-\frac{2(I_1+I_3)}{T}\right\}$	$-I_1$	0
$I_1 = I_2 = -I_3$ ($T_c = 0$)	$\frac{1}{\pi}\left[\frac{4I_1}{T}\right]^3 \exp\left\{-\frac{4I_1}{T}\right\}$ *	$-I_1$	$\frac{G^*}{\pi}$

Авторы благодарны Л.А.Пастуру за стимулирующие обсуждения.

Харьковский государственный университет им. А.М.Горького

Поступила в редакцию 14 февраля 1980 г.

Литература

[1] J.Villain, J. Phys. C: Solid State Phys., 10, 1717, 1977.

[2] G.Andre. et al. J. Physique, 40, 479, 1979.

[4] E.H.Lieb, T.D.Schultz, D.C.Mattis. Rev. Mod. Phys., 36, 856, 1964.