Письма в ЖЭТФ, том 31, вып.7, стр. 421 – 425 5 апреля 1980 г.

ОБ УСТРАНЕНИИ РАСХОДИМОСТЕЙ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ТЕОРИИ ЯНГА – МИЛЛСА

И.Я.Арефьева

Показано, что в четырехмерной теории Янга – Миллса расходимости в выражении $z < P\exp\{g\int_\Gamma A_\mu dx^\mu\} >$ для гладкого несамопересекающегося контура Г устраняются перенормировкой константы связи g и множителя z. В трехмерном случае возникают аномалии.

Янгом [1] была предложена интегральная формулировка калибровочной теории, в основе которой лежит понятие фазового фактора $\mathcal{G}(\Gamma) = P\exp\{g\int_\Gamma A_\mu dx^\mu\}$. Рассмотрение динамики для $\mathcal{G}(\Gamma)$ приводит к понятию кирального поля на контуре [2]. Именно в этих терминах получены высшие законы сохранения в трехмерной теории Янга – Миллса [2, 3] и есть основания полагать, что в теории возмущений для контурных переменных возможно получить возбуждения типа струн [4, 5, 3, 2, 6], а, следовательно, установить вильсоновский критерий удержания кварков [7].

Теория возмущений для контурных переменных, как и для обычных функций Грина, может быть построена итерированием соответствующих уравнений Швингера, причем способ итерации, приводящий к качественно новым ответам видимо должен отличаться от теории возмущений по константе связи. Однако сами уравнения должны выполняться в том числе и по обычной теории возмущений. Чтобы записать такие уравнения, нужно показать, что величина

$$z < \mathcal{G}(\Gamma) > = z < P \exp \{ g \int_0^1 A_\mu(x(s)) x'_\mu(s) ds \} >$$

конечна по-крайней мере в рамках стандартной теории возмущений. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья. В первых порядках теории возмущений она рассматривалась в [8, 9].

Основная трудность при рассмотрении перенормировки выражения $< \mathcal{G}(\Gamma) >$ в том, что эта величина не локальная, а обычная теория R-операции приспособлена к работе с локальными объектами. В работе [8] предложен способ записать $< \mathcal{G}(\Gamma) >$ с помощью локального взаимодействия поля Янга – Миллса с одномерными фермионами, "живущими на контуре" Γ:

$$< \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\Gamma) > = N \frac{\delta^2}{\delta\bar{\lambda}_\beta(1)\delta\lambda_\alpha(0)} \int \exp \left\{ \int d^D x \left[\frac{1}{8} \operatorname{tr} F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{4b} \operatorname{tr} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 ds [\bar{\psi}(s) \partial_s \psi(s) + g \bar{\psi}(s) A_\mu(x(s)) x'_\mu(s) \psi(s) + i\bar{\lambda}\psi + i\bar{\psi}\lambda \right] \right\} \Delta(A) \times$$

$$\times \prod_x dA \prod_s d\bar{\psi} d\psi \Big|_{\lambda = \bar{\lambda} = 0}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu, A_\nu], \quad \bar{\lambda}\psi = \bar{\lambda}_i \psi_i, \tag{1}$$

обозначения см. [10]. Убедиться в справедливости (1) можно выполняя интегрирование по полям $\bar{\psi}$, ψ и предполагая $\partial_s^{-1} = \theta(s)$, $\theta(0) = 0$.

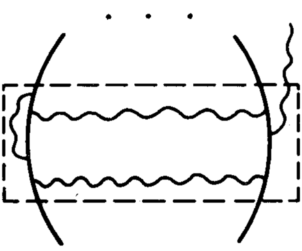

Рис.1.

Диаграммная техника теории возмущений по g для функционала (1) состоит из линий векторного поля A_μ (волнистые линии), линий гостов $\bar{c}$, c (пунктирные линии), а также из линий – пропагаторов одномерных фермионов $G(s - s') = \theta(s - s')$ (сплошные линии). В описанной диаграмной технике, помимо обычных расходимостей, содержащихся в функциях Грина локальных вершин и устраняющихся обычной перенормировкой, содержатся расходимости в диаграммах с внутренними линиями, оканчивающимися на контуре. Рассмотрим сначала диаграммы, не содержащие локальных вершин (типа рис.1). Для их исследования удобно в глюонных линиях $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ перейти к эффективному α-представлению:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q, s) = \delta_{\mu\nu} \int d\eta \int_0^\infty \frac{da}{(a)^{D/2}} \exp \left\{ iq\eta - \frac{|x(s) - x(s+\eta)|^2}{4a} \right\} \text{ при } b = 1,$$

и считать, что $D = n - 2\epsilon$ ($n = 3,4$). Предполагая контур $x_\mu(s)$ несамопересекающимся и бесконечно гладким, $\mathcal{D}_{\mu\nu}(q,s)$ можно представить в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q,s) = \delta_{\mu\nu}\int_0^\infty da\ \frac{a^{-\frac{D-1}{2}}}{|x'(s)|}\left\{1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{a}\sum_{k\geq 4} a_k\left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^k\right]^n\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{q^2 a}{|x'(s)|^2}\right\}.$$

при $|x'| = \mathrm{const}$.

Для исследования ультрафиолетового поведения графов удобно фурье-преобразование $G(q)$ функции Грина $G(s)$ заменить его асимптотикой

$$G_{as}(q) = \int_0^\infty a^{-1/2}\, e^{-a q^2}\, da\ .$$

Общая структура асимптотики любого подграфа типа рис.1 имеет вид

$$\int\prod_l dq_l\, da_l\, e^{-\sum_l q_l^2 a_l}\prod_{l\in\{l_\psi^{int}\}}(a_l)^{-1/2}\prod_{l\in\{l_A^{int}\}}(a_l)^{-\frac{D-1}{2}}\prod_{v_{int}}\delta(\quad)\,[1+\ldots]\,. \quad (3)$$

Здесь l_ψ^{int} – внутренние фермионные линии, l_A^{int} – внутренние бозонные линии, v_{int} – внутренние вершины и δ – функция описывает закон сохранения одномерного импульса. Вычисляя общую степень полюса λ при замене переменных $a_i = \lambda\xi_i$, $\Sigma\xi_i = 1$ и $\sqrt{\lambda}q = Q$, получаем $(L_A^{ext} - 3)/2$ при $D = 4$ и $(L_A^{int} + L_A^{ext} - 3)/2$, при $D = 3$. В целые отрицательные степени по λ не дают вклада слагаемые ... в (3). Таким образом, при $D = 4$ расходятся диаграммы без внешних A_μ-линий и с одной внешней A_μ-линией, т.е. необходимые контрчлены имеют вид $z_{\psi k+1}\bar\psi\partial_s\psi(\bar\psi\psi)^k$ и $z_{Ak+1}\bar\psi A_\mu x'_\mu\psi(\bar\psi\psi)^k$. Контрчлены при $k > 0$ являются аномальными (их нет в исходном выражении (1)), но они не дают вклада, поскольку каждая такая диаграмма содержит петлю из ψ-линий.

Графы, содержащие как локальные вершины, так и вершины, лежащие на контуре, рассматриваются аналогично.

Следуя логике [10] вывода конечности локальных функций Грина можно показать что выражение

$$\int\exp\left\{\int d^D x\left[\frac{1}{8}\mathrm{tr}\, z_2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + z_1 z_2^{-1} g\,[A_\mu A_\nu])^2 + \frac{1}{4b}\,\mathrm{tr}(f(\Box)\,\partial_\mu A_\mu)^2 -\right.\right.$$

$$-\tilde z_2(\bar c\,\Box c - \tilde z_1\tilde z_2^{-1} g\bar c\,\partial_\mu(A_\mu c))\,] + \int_0^1 ds\,[z_{2\psi}(\bar\psi\partial_s\psi + z_{2\psi}^{-1} z_{1\psi} g\bar\psi(s)A_\mu\times$$

$$\left.\left.\times x'_\mu(s)\psi(s)) + i\bar\lambda\psi + i\bar\psi\lambda\right]\right\}\prod_x dA_\mu d\bar c\, dc\prod_s d\bar\psi d\psi$$

при условиях $\tilde{z}_2^{-1}\tilde{z}_1 = z_{2\psi}^{-1} z_{1\psi} = z_2^{-1} z_1$ конечно при снятии регуляризации. Для этого достаточно использовать тождество Уорда вида

$$\frac{1}{b} f^2(\Box)\,\partial_\mu^x \frac{\delta Z_R}{i\delta J_\mu^a(x)} = \int dy\,\mathcal{D}_0(x-y)\,\partial_\mu J_\mu^a(y)\, Z_R + \int dy\, J_\rho^{tr\, b}(y)\, t^{bcd} \times$$

$$\times\, g\tilde{z}_1 \frac{\delta}{i\delta J_\rho^c(y)} G_R^{da}(y, x, J, \lambda) + \int ds\, \tilde{z}_1 g \left[\bar{\lambda}_i(s) T_{ij}^b \frac{\delta}{i\delta\bar{\lambda}_j(s)} - \right.$$

$$\left. - \lambda_i(s) T_{ij}^b \frac{\delta}{i\delta\lambda_j(s)}\right] G_R^{ab}(y, x, J, \bar{\lambda}, \lambda) = 0$$

и показать конечность диаграммы рис.2.

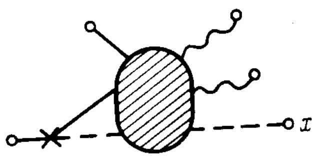

Рис.2.

Итак, показано, что величина $z(\epsilon, g) < P\exp\{g_0(\epsilon, g)\int_\Gamma A_\mu dx^\mu\} >$ конечна при $\epsilon \to 0$, $n = 4$.

При $n = 3$ контрчлен возникает только во втором порядке и имеет вид $m(\epsilon) g^2 |x'| \bar{\psi}(s)\psi(s)$. Это приводит к замене θ-функции на функцию Грина $G_m(s, s') = \theta(s - s')\exp\{-m(\epsilon) g^2 \int_s^{s'} |x'|\, d\tau\}$ оператора $\partial_s + m(\epsilon) g^2 |x'(s)|$, т.е. конечной величиной при $\epsilon \to 0$, $n = 3$ является

$$\exp\{-m(\epsilon)\, g^2 \int_0^1 |x'(s)|\, ds\} < P\exp\{g\int_0^1 A_\mu dx^\mu\} > .$$

Появление этих "массовых" фермионных аномалий возможно приведет к модификации квантового уравнения в вариационных производных для перенормированных контурных переменных.

Интересной задачей является исследование перенормированного функционала поверхности, предложенного в [11].

Автор приносит искреннюю благодарность А.А.Славнову и Л.Д.Фаддееву за полезные обсуждения.

Математический институт
им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 января 1980 г.

Литература

[1] C.N.Yang. Phys. Rev. Lett., 33, 445, 1974.

[2] I.Ya Aref'eva. Lett. in Math. Phys., 3, 270, 1979; И.Я.Арефьева. Сб. "Проблемы квантовой теории поля". ОИЯИ, Р 12, 462, 1979.

[3] A.M.Polyakov. Phys. Lett., B82, 274, 1979.

[4] Y.Nambu. Phys. Lett., 80B, 372, 1979.

[5] J.L.Gervais, A.Neveu. Phys. Lett., 80B, 55, 1979.

[6] Yu.M.Makeenko, A.A.Migdal. Preprint IIEF, 86, 1979.

[7] K.Wilson. Phys. Rev., D10, 2445, 1974.

[8] J.L.Gervais, A.Neveu. Preprint LPIENS 79/14.

[9] A.M.Polyakov. Aspen preprint, 1979.

[10] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. "Введение в квантовую теорию калибровочных полей", М., изд. Наука, 1978.

[11] I.Ya.Aref'eva. Wroclaw preprint, 480, november, 1979.