Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 9, с. 565 – 569 © 2002 г. 10 мая

Динамика двухуровневой системы, взаимодействующей со случайным классическим полем

Г. Б. Лесовик, А. В. Лебедев[1], *А. О. Имамбеков*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 марта 2002 г.

Методом функционального интегрирования исследована динамика частицы в двухъямном потенциале, взаимодействующей со случайным классическим полем. Детально изучено поведение вероятностей локализации частицы в той или иной яме. Вычислены определенные корреляторы для квантовомеханических вероятностей, усредненные по внешнему случайному полю, а также функция распределения для вероятностей конечных состояний (которые можно рассматривать как случайные величины из-за наличия случайного поля). Пользуясь вычисленными корреляторами, мы обсуждаем зависимость конечного состояния от начального. Один из главных результатов работы состоит в том, что хотя недиагональные элементы матрицы плотности исчезают со временем, полной локализации частицы (редукции волнового пакета) в системе не происходит, и на бесконечно больших временах функция распределения для вероятности найти частицу в одной из ям оказывается константой.

PACS: 03.65.Ta, 42.50.Lc

Стандартная интерпретация квантовой механики включает в себя постулат о редукции волнового пакета (РВП) в процессе измерения [1]. Вопрос о механизме РВП либо остается за пределами теории, либо постулируется. В статье [2] было предложено рассматривать резервуар как источник РВП. В данной работе мы детально исследовали влияние степеней свободы резервуара (которые были смоделированы случайным классическим полем) на процесс локализации на примере двухуровневой системы.

Развитая за последние 20 лет концепция декогеренции оставляет открытым вопрос о РВП [3]. Обычно авторы интересуются поведением матрицы плотности квантовой системы в результате ее взаимодействия с окружающей средой. При таком подходе в результате усреднения по степеням свободы среды существенная часть информации о динамике системы теряется, что не позволяет решить вопрос о РВП. В работах [2] было предложено для рассмотрения РВП вычислять величины, отличающиеся от матрицы плотности.

В данной работе мы изложим способ и результаты вычисления такого сорта величин на простом примере двухуровневой системы.

Рассмотрим частицу в двухъямном потенциале, взаимодействующую со случайным классическим полем. Задача, которую мы рассматриваем, состоит в следующем: до момента времени $t = 0$ частицу удерживают в левой яме, затем отпускают. В дальнейшем мы интересуемся поведением системы, усредненным по степеням свободы среды. Поскольку вероятность нахождения частицы в левой яме после усреднения по степеням свободы среды не несет полной информации о динамике [2], будем интересоваться не только усредненной по состояниям среды вероятностью нахождения частицы в левой яме $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$(первый индекс обозначает начальное состояние, второй индекс – конечное), но и корреляторами вида

$$\langle P_{L\to L}(t)P_{L\to R}(t)\rangle, \tag{1}$$

где скобки означают усреднение по степеням свободы резервуара. Необходимость вычисления корреляторов такого вида следует из того факта, что вероятности, получаемые из матрицы плотности, представляют собой результат как квантовомеханического усреднения, так и усреднения по степеням свободы среды. Например, обращение $\langle P_{L\to L}(t=\infty)\rangle$ в 1/2 может происходить разными способами. Возможна ситуация, когда в зависимости от состояний среды, либо $P_{L\to L}(t=\infty)=1$, либо $P_{L\to L}(t=\infty)=0$, а 1/2 получается только в результате усреднения. В этом случае в рассматриваемой модели имеется РВП, и обращение в 0 коррелятора (1) будет однозначно свидетельствовать об этом. В более общем случае имеется некоторая функция $P(P_{L\to L}(t))$ – плотность вероятности состояний среды, в которых частица оказывается в правой яме с вероятностью $P_{L\to L}(t)$. Зная все корреляторы вида $\langle P_{L\to L}(t)^n\rangle$, можно определить величину $P(P_{L\to L}(t))$.

[1] e-mail: alebedev@itp.ac.ru

Определим более детально модель, которую мы рассматриваем. Будем считать, что ямы симметричные, и при отсутствии туннелирования энергия нижних состояний вырождена. При определенных условиях [4] можно считать, что гильбертово пространство состояний частицы становится двумерным.

Выберем в качестве базиса состояния, в которых координата частицы принимает определенные значения, $\pm q_0/2$. При наличии туннелирования гамильтониан для частицы, не взаимодействующей с полем, имеет вид

$$H_0 = -\frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_x.$$

Тут σ_x – матрица Паули, и базис выбран таким образом, что собственное значение σ_z, равное $+1(-1)$, соответствует частице, локализованной в правой(левой) яме. Взаимодействие между полем и частицей будем учитывать, добавляя в гамильтониан линейный по полю член $q\varphi(t)$. В данной модели случайное поле определяется внешней средой. Будем считать, что распределение вероятностей для поля $\varphi(t)$ гауссово и коррелятор для поля имеет вид белого шума

$$\langle\varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = \delta(t_1 - t_2)\langle\varphi^2\rangle. \tag{2}$$

Усреднение в данном случае понимается по степеням свободы окружающей среды, которая вызывает неконтролируемые отклонения поля от нулевого значения. Гамильтониан для частицы имеет вид

$$H(t) = -\frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_x + \frac{q_0\varphi(t)}{2}\sigma_z. \tag{3}$$

Такая модель эквивалентна спину 1/2 в магнитном поле, когда компонента поля вдоль оси x фиксирована, а поле вдоль оси z случайное.

Вероятность $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ с помощью функционала влияния [5] записывается в виде двойного функционального интеграла по траекториям:

$$\langle P_{L\to L}(t)\rangle = \int\int Dq_1(\tau 1)Dq_2(\tau 2)A[q_1(\tau 1)] \times \\ \times A^*[q_2(\tau 2)]F[q_1(\tau 1), q_2(\tau 2)], \tag{4}$$

где функциональный интеграл берется по всем траекториям, таким, что $q_1(0) = q_2(0) = q_1(t) = q_2(t) = -q_0/2$, $A[q(\tau)]$ – амплитуда для траектории $q(\tau)$ в отсутствие случайного поля; $F[q_1(\tau 1), q_2(\tau 2)]$ – функционал влияния, который для гауссового случайного потенциала с коррелятором (2) равен [5]

$$F[q_1(\tau 1), q_2(\tau 2)] = \\ = \left\langle \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \varphi(\tau)(q_1(\tau) - q_2(\tau))d\tau\right\}\right\rangle = \\ = \exp\left\{-\frac{\langle\varphi^2\rangle}{2\hbar^2}\int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))^2\, d\tau\right\}. \tag{5}$$

В любой момент времени пара траекторий $[q_1, q_2]$ находится в одном из четырех состояний $[-,-]$, $[-,+]$, $[+,-]$, $[+,+]$, которые мы обозначим как A, B, C, D. Введем обозначение $\xi(t) = q_0^{-1}(q_1(t) - q_2(t))$. Тогда функционал влияния перепишется в виде

$$F[q_1(\tau 1), q_2(\tau 2)] = \exp\left\{-\Gamma\int_0^T \xi(t)^2 dt\right\}, \tag{6}$$

$$\Gamma = q_0^2\langle\varphi^2\rangle/2\hbar^2. \tag{7}$$

Следуя формализму, описанному в [4], запишем $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ в виде разложения по степеням $i\Delta/2$. Такой множитель с точностью до знака возникает для каждого перескока. Будем описывать состояние $[q_1, q_2]$ в каждый момент времени как четырехмерный вектор $\mathbf{E}_i$, где $i = \{1,2,3,4\}$ соответствует состояниям $\{A, B, C, D\}$. Если ввести матрицу возможных перескоков, то она имеет вид (знак учитывает знак амплитуды перехода)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Введем матрицу, учитывающую вес каждой траектории из-за функционала влияния:

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

тогда $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ запишется в виде

$$\langle P_{L\to L}(t)\rangle = \mathbf{E}_1^T \times \left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots \right. \\ \left. \ldots\int_0^{t_2} dt_1 \mathbf{U}(t - t_n)\mathbf{S}\ldots\mathbf{S}\mathbf{U}(t_1)\right]] \times \mathbf{E}_1, \tag{10}$$

где мы ввели обозначение $\mathbf{S} = i\Delta/2\,\Lambda$, $t_1,\ldots,t_n$ – времена перескоков, $\mathbf{E}_1 = \{1,0,0,0\}^T$ – вектор, соответствующий состоянию A. Сделаем преобразование Лапласа величины $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$:

$$\langle P_{L\to L}(\lambda)\rangle = \int\limits_0^\infty \langle P_{L\to L}(t)\rangle e^{-\lambda t}dt.$$

Изменение переменных интегрирования в (10) дает

$$\langle P_{L\to L}(\lambda)\rangle = \mathbf{E}_1^T \times \left[\sum_{n=0}^\infty [\mathbf{U}(\lambda)\mathbf{S}]^n\right] \mathbf{U}(\lambda) \times \mathbf{E}_1 = \\ = \mathbf{E}_1^T \times [\mathbf{U}^{-1}(\lambda) - \mathbf{S}]^{-1} \times \mathbf{E}_1, \quad (11)$$

где $\mathbf{U}(\lambda)$ – преобразование Лапласа $\mathbf{U}(t)$:

$$\mathbf{U}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+\Gamma)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\Gamma)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, вычисление $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ свелось к вычислению матричного элемента обратной матрицы 4×4 и взятию обратного преобразования Лапласа. В итоге получаем

$$\langle P_{L\to L}(\lambda)\rangle = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{2\lambda^2 + 2\lambda\Gamma + \Delta^2}{\lambda^2 + \Gamma\lambda + \Delta^2}.$$

Для нахождения $\langle P_{L\to L}(t=\infty)\rangle$ надо знать только значение вычета $\langle P_{L\to L}(\lambda)\rangle$ в точке $\lambda = 0$, он равен значению обратного преобразования Лапласа при $t=\infty$. Для $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ ответ можно вычислить точно:

$$\frac{1}{2} + \frac{\exp\{\frac{1}{2}t(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})\}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})}{4\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2}} + \\ + \frac{\exp\{-\frac{1}{2}t(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})\}(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})}{4\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2}}. \quad (13)$$

Как видно, для любого ненулевого Γ значение $\langle P_{L\to L}(t=\infty)\rangle = 1/2$, причем при значении $\Gamma = 2\Delta$ наблюдается переход от затухающих колебаний к релаксации.

В пределе $\Gamma \gg \Delta$ в задаче имеется два времени релаксации, одно из времен, $\tau_1 = \Gamma^{-1}$, гораздо меньше другого времени, $\tau_2 = \Gamma/\Delta^2$.

Аналогичным способом можно вычислить недиагональные элементы матрицы плотности $\langle\Psi_L(t)^*\Psi_R(t)\rangle$, ответ

$$\langle\Psi_L(t)^*\Psi_R(t)\rangle = \frac{i\Delta\exp\{-\frac{1}{2}t(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})\}}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2}} - \\ - \frac{i\Delta\exp\{\frac{1}{2}t(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2})\}}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta^2}} \quad (14)$$

также имеет два характерных времени, причем $\langle\Psi_L(\infty)^*\Psi_R(\infty)\rangle = 0$. В пределе $\Gamma \gg \Delta$ максимальное по модулю значение достигается через времена порядка τ_1 и равно[2)] $\Delta/2\Gamma$.

Для подсчета величины $\langle P_{L\to L}(t)P_{L\to L}(t)\rangle$ можно также использовать развитый выше формализм. В этом случае функциональный интеграл берется по четырем траекториям, состояние системы в каждый момент описывается 16-мерным вектором. Если ввести для каждой пары траекторий свои переменные $\xi_1(t) = q_0^{-1}(q_1(t) - q_2(t)), \xi_2(t) = q_0^{-1}(q_3(t) - q_4(t))$, то четырехточечный функционал влияния запишется аналогично (6):

$$F[q_1(\tau 1), q_2(\tau 2), q_3(\tau 3), q_4(\tau 4)] = \\ = \exp\left\{-\Gamma\int\limits_0^t (\xi_1(\tau) + \xi_2(\tau))^2 d\tau\right\}. \quad (15)$$

Если аналогично (8), (12) ввести 16-мерные матрицы $\mathbf{S2}(t), \mathbf{U2}(t)$(явный вид их мы выписывать не будем), получим формулу, аналогичную (11):

$$\langle P_{L\to L}(t)P_{L\to L}(t)\rangle = \mathbf{E}_1^T \times [\mathbf{U2}^{-1}(\lambda) - \mathbf{S2}]^{-1} \times \mathbf{E}_1, \quad (16)$$

где вектор $\mathbf{E}_1$ соответствует состоянию $[-,-,-,-]$ траекторий $[q_1, q_2, q_3, q_4]$.

Вычисление дает результат

$$\langle P^2_{L\to L}(\lambda)\rangle = \frac{1}{3\lambda} + \frac{\Gamma+\lambda}{2(\Delta^2 + \Gamma\lambda + \lambda^2)} + \\ + \frac{\Delta^2 + (\Gamma+\lambda)(4\Gamma+\lambda)}{6(4\Delta^2(3\Gamma+\lambda) + \lambda(\Gamma+\lambda)(4\Gamma+\lambda))}. \quad (17)$$

Для бесконечного времени $\langle P_{L\to L}(t=\infty)^2\rangle = 1/3$. В пределе $\Gamma \gg \Delta$ этот коррелятор также имеет два характерных времени, определяемых действительной

[2)] Отметим, что формально в нашей задаче частица (или “спин” в эквивалентной задаче), взаимодействуя с классическим полем, всегда обладает чистой матрицей плотности. Это естественно, поскольку частица не может воздействовать на классическое поле, и поэтому не возникает квантовых запутанных состояний. Тем не менее, в практическом смысле разница между наличием “реального” резервуара и случайного классического поля невелика, так как чтобы доказать, что частица находится в некотором чистом состоянии, необходимо проделать серию измерений. Для того чтобы, например, с определенностью за одно измерение получить определенный результат, следует иметь весьма точные данные о величине флуктуирующего классического поля $\varphi(t)$, мониторинг которого прямо в точке расположения “спина” проблематичен. Кроме того, динамика поведения во времени вероятностей $\langle P_{L\to L}(t)\rangle$ идентична в обоих случаях.

частью полюсов $\langle P_{L\to L}^2(\lambda)\rangle$. С точностью до первых неисчезающих членов времена релаксации в (17) равны $\tau_1, \tau_1, \tau_1/4, \tau_2, \tau_2/3$.

Аналогичное вычисление для остальных корреляторов второго порядка дает

$$\langle P_{L\to R}(t=\infty)^2\rangle = \frac{1}{3}, \qquad \langle P_{L\to L}(t=\infty)P_{L\to R}(t=\infty)\rangle = \frac{1}{6}. \tag{18}$$

Таким образом, хотя недиагональные элементы матрицы плотности исчезают со временем, $\langle P_{L\to L}(t=\infty)P_{L\to R}(t=\infty)\rangle \neq 0$ и локализации частицы (редукции волнового пакета) в системе не происходит.

Процедура вычисления может быть легко обобщена на случай $\langle P_{L\to L}(t)^n\rangle$, хотя размеры матриц быстро растут. Численные расчеты показывают, что

$$\langle P_{L\to L}(t=\infty)^3\rangle = \frac{1}{4}, \quad \langle P_{L\to L}(t=\infty)^4\rangle = \frac{1}{5}. \tag{19}$$

Таким образом, мы полагаем (хотя общего доказательства получить не удалось), что в нашей модели $P(P_{L\to L}(\infty))$ – плотность вероятности состояний среды, в которых частица оказывается в левой яме через бесконечное время с вероятностью $P_{L\to L}(\infty)$, равна 1 на интервале $(0,1)$. Действительно, в этом случае

$$\langle P_{L\to L}^n\rangle = \int\limits_0^1 (P_{L\to L})^n P(P_{L\to L})\, d(P_{L\to L}) = \frac{1}{n+1}, \tag{20}$$

что полностью соответствует нашим предыдущим результатам. Коррелляторы вида $\langle P_{L\to L}^n P_{L\to R}^m\rangle$ равны

$$\langle P_{L\to L}^n P_{L\to R}^m\rangle = \int\limits_0^1 P^n(1-P)^m dP = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!}. \tag{21}$$

Исходя из симметричности матриц в формуле (11), можно установить следующее свойство симметрии относительно замены начальных и конечных состояний:

$$\langle P_{L\to L}^n P_{L\to R}^m\rangle = \langle P_{L\to L}^n P_{R\to L}^m\rangle. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости конечного состояния от начального, когда исходное состояние имеет вид

$$|S> = a|\Psi_L> + b|\Psi_R>, \quad |a|^2+|b|^2 = 1. \tag{23}$$

Используя соотношения (21), (22), получаем

$$\langle P_{S\to L}^n\rangle = \langle (a^* < \Psi_{L\to L}| + b^* < \Psi_{R\to L}|)^n (a|\Psi_{L\to L}> + b|\Psi_{R\to L}>)^n\rangle = (|a|^2+|b|^2)^n/(n+1) = 1/(n+1). \tag{24}$$

Таким образом, в данной модели функция распределения для вероятностей в конечном состоянии через очень большое время не зависит от начального состояния.

Тем не менее, в каждом *конкретном* случае финальное состояние зависит от исходного. Для определения чувствительности к начальному состоянию мы вычислили следующий коррелятор:

$$\langle (P_{S\to L} - P_{S'\to L})^2\rangle = \frac{|ab'-a'b|^2}{3}, \tag{25}$$

где $|S'> = a'|\Psi_L> + b'|\Psi_R>$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда для одного начального состояния, $|S>$, $a = b = 1/\sqrt{2}$ (основное состояние), а для второго, $|S'>$, – $a' = -b' = 1/\sqrt{2}$ (возбужденное состояние). Тогда $\langle (P_{S\to L} - P_{S'\to L})^2\rangle = 1/3$. Заметим, что полученное типичное отклонение в финальных вероятностях $1/\sqrt{3}$, что больше средней вероятности $1/2$.

Мы можем теперь рассмотреть вопрос о чувствительности конечного состояния к изменениям внешнего поля. Сформулируем задачу в терминах спина во внешнем магнитном поле. Будем рассматривать коррелятор вида $\langle (P_L\{H(t)\} - P_L\{H(t)+\delta H_z(t)\})^2\rangle$. В общем виде задача осложняется тем, что гамильтониан $\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\sigma}$ в разные моменты времени некоммутативен. Мы можем, однако, рассмотреть частный случай, когда поле $\delta H_z(t)$ действует в течение короткого интервала времени (такого, что поворотом спина относительно оси x в меру малости $H_x\sigma_x$ можно пренебречь) в самом начале эволюции состояния частицы. В этом случае данная задача сводится к предыдущей, если мы определим состояние $|S'> = a'|\Psi_L> + b'|\Psi_R>$ как

$$|S'> = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dt\, \delta H_z(t)\, \sigma_z\right]\, [a|\Psi_L> + b|\Psi_R>]. \tag{26}$$

Определение нового состояния (a', b') сводится к набору относительной фазы $2\delta\Phi = (2/\hbar)\int \delta H_z(t)\, dt$ величин a и b. Если импульс поля был приложен не в самом начале, то мы можем переформулировать задачу, стартуя с некоторого фиксированного состояния (a_0, b_0) в момент t_0. В этом случае после усреднения получим

$$\langle (P_L\{H(t)\} - P_L\{H(t) + \delta H_z(t)\})^2\rangle_{t=\infty} =$$

$$= \langle (P_L(t_0)P_R(t_0)\rangle \frac{4\sin^2(\delta\Phi)}{3}. \qquad (27)$$

В заключение заметим, что, по мнению авторов, если в рассмотренной задаче о частице в двухъямном потенциале к "классическому" резервуару добавить квантовый, то в этом случае на больших временах должна наблюдаться локализация частицы. Качественно этот процесс выглядит так: в каждый момент времени классическое поле обеспечивает разность уровней в ямах, достаточно большую для того, чтобы для мгновенного значения гамильтониана его собственные состояния были бы локализованы в каждой из ям, а в процессе испускания фотонов происходит переход в нижайшее (и локализованное) состояние.

Авторы благодарны Г. Е. Воловику за полезные обсуждения. Работа поддержана общественным фондом содействия отечественной науки, Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 000216617), Министерством науки (проект "Физические основы квантовых вычислений"), Голландским научным фондом (грант для сотрудничества с Россией), Швейцарским научным фондом.

---

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, том III, гл. 1, § 7, М.: Наука, 1974.
2. Г. Б. Лесовик, Письма в ЖЭТФ **74**, 528 (2001); Г. Б. Лесовик, УФН **171**, 449 (2001).
3. S. L. Adler, *Why decoherence has not solved the measurement problem: a response* to P.W. Anderson, arXiv: quant-ph/0112095.
4. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey et al., Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
5. R. P. Feynman and F. L. Vernon, Jr., Ann. Phys. (N. Y.) **24**, 118 (1963).