Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 6, с. 387 – 391 © 2002 г. 25 сентября

О функции Гелл-Манна – Лоу в КХД

И. М. Суслов[1)]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2002 г.

После переработки 5 июня 2002 г.

Показано, что в КХД функция Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$ в области сильной связи имеет поведение $\beta_\infty g^\alpha$ ($g = \bar{g}^2/16\pi^2$, $\bar{g}$ – константа связи, входящая в лагранжиан), где $\alpha \approx -13$, $\beta_\infty \sim 10^5$.

PACS: 11.10.–z

В недавних работах автора [1, 2] предложен алгоритм суммирования расходящихся рядов теории возмущений, с помощью которого восстановлены функции Гелл-Манна – Лоу теории φ^4 [1, 2] и квантовой электродинамики [3]. В настоящей работе мы применим этот алгоритм к КХД. Предпринимавшиеся ранее попытки такого рода [4] давали неопределенные результаты.

1. Информация обо всех членах ряда теории возмущений может быть получена путем интерполяции известных первых членов с асимптотикой Липатова [5]. Для КХД известны четыре члена разложения функции Гелл-Манна – Лоу в MS-схеме [6]:

$$\beta(g) = \sum_{N=0}^{\infty} \beta_N g^N = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \beta_4 g^4 + \dots , \qquad g = \bar{g}^2/16\pi^2, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} -\beta_2 = 11 - \frac{2}{3}N_f, \quad -\beta_3 = 102 - \frac{38}{3}N_f, \\ -\beta_4 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2, \\ -\beta_5 = \left[\frac{149753}{6} + 3564\zeta(3)\right] - \\ - \left[\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta(3)\right] N_f + \\ + \left[\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta(3)\right] N_f^2 + \frac{1093}{729}N_f^3. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь N_f – число сортов кварков, $\bar{g}$ – константа связи, входящая в лагранжиан КХД:

$$\begin{gathered} L = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)^2 + \\ + \sum_f \bar{\psi}_f \hat{D}\psi_f + \partial_\mu \bar{\omega}^a \left(\partial_\mu \omega^a - \bar{g} f^{abc}\omega^b A^c_\mu\right), \\ F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \bar{g} f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \\ \hat{D} = i\gamma_\mu \left(\partial_\mu - i\bar{g}A^a_\mu T^a\right), \end{gathered} \tag{3}$$

где A^a_ν, ψ_f, ω^a – глюонные, кварковые и духовые поля, T^a и f^{abc} – генераторы фундаментального представления и структурные константы алгебры Ли, ξ – параметр калибровки, индекс f нумерует сорта кварков.

2. Асимптотика теории возмущений обсуждалась в [7 – 9] для полей Янга-Миллса и в [10, 11] для КХД, однако результаты не обладают требуемой общностью. Ниже мы частично восполним этот пробел[2)].

Наиболее общий функциональный интеграл для КХД содержит в предэкспоненте M глюонных, $2L$ духовых и $2K$ кварковых полей:

$$\begin{gathered} Z_{MLK} = \int DAD\bar{\omega}D\omega D\bar{\psi}D\psi\, A(x_1)\dots A(x_M) \times \\ \times\, \omega(y_1)\bar{\omega}(\bar{y}_1)\dots\omega(y_L)\bar{\omega}(\bar{y}_L)\psi(z_1) \times \\ \times\, \bar{\psi}(\bar{z}_1)\dots\psi(z_K)\bar{\psi}(\bar{z}_K)\exp\left(-S\{A,\bar{\omega},\omega,\bar{\psi},\psi\}\right), \end{gathered} \tag{4}$$

где мы опускаем векторные индексы, не существенные для наших целей. После замены $A \to B/\bar{g}$ евклидово действие принимает вид

$$S\{A,\bar{\omega},\omega,\bar{\psi},\psi\} \longrightarrow \frac{S\{B\}}{\bar{g}^2} + \int d^4x \left[\bar{\omega}\hat{Q}\omega + \sum_f \bar{\psi}_f \hat{D}\psi_f\right] \tag{5}$$

и интегрирование по фермионным полям дает

$$\begin{gathered} Z_{MLK} = (1/\bar{g})^M \int DA\, B(x_1)\dots B(x_M) \times \\ \times\, G(y_1,\bar{y}_1)\dots G(y_L,\bar{y}_L)\tilde{G}(z_1,\bar{z}_1)\dots\tilde{G}(z_K,\bar{z}_K) \times \\ \times \det\hat{Q}\left(\det\hat{D}\right)^{N_f}\exp\left\{-S\{B\}/\bar{g}^2\right\} + \dots , \end{gathered} \tag{6}$$

где G и $\tilde{G}$ – функции Грина операторов $\hat{Q}$ и $\hat{D}$, а многоточием показаны члены с другими спариваниями. Существенно, что $S\{B\}$, G и $\tilde{G}$ не зависят

[1)] e-mail: suslov@kapitza.ras.ru

[2)] Наша позиция в отношении ренормалонных вкладов сформулирована в [3]. Существование ренормалонных сингулярностей в КХД не доказано и не опровергнуто, и мы работаем в предположении, что они отсутствуют.

от $\bar{g}$. Функциональный интеграл (6) определяется янг-миллсовским действием и асимптотика его коэффициентов разложения по $\bar{g}$ может быть найдена методом Липатова [5]. Для перевальной кофигурации $\bar{g} \sim N^{-1/2}$, где N – порядок теории возмущений: поэтому каждое поле $A(x_i)$ в предэкспоненте (4) дает множитель $N^{1/2}$, тогда как остальные поля не дают зависящих от N множителей. Зависимость коэффициентов разложения от N может быть выделена, следуя работе [10], и отличается лишь множителем $N^{M/2}$ от результата для кваркового коррелятора; вклад N-го порядка в Z_{MLK} имеет вид

$$[Z_{MLK}]_N \, \bar{g}^{2N} = \text{const}\,(16\pi^2)^{-N} \times \\ \times \Gamma\left(N + \frac{M}{2} + 4N_c + \frac{11(N_c - N_f)}{6}\right) \bar{g}^{2N} \tag{7}$$

для четных M и с лишним множителем $\bar{g}N^{1/2}$ – для нечетных M (N_c – число цветов)[3].

Имея результат для функционального интеграла и пользуясь алгеброй факториальных рядов [15], нетрудно получить результат для любой величины. Пусть $F_N\bar{g}^{2N}$ – вклад N-го порядка в вакуумный интеграл ($M = L = K = 0$). Тогда общий член асимптотики (с точностью до коэффициента) имеет вид $NF_N\bar{g}^{2N}$ для глюонного пропагатора Δ, $F_N\bar{g}^{2N}$ – для духового пропагатора G и кваркового пропагатора G_f, $NF_N\bar{g}^{2N+1}$ – для глюонно-духовой вершины γ_3 и глюонно-кварковой вершины γ_3^f, $N^2F_N\bar{g}^{2N+1}$ – для трехглюонной вершины Γ_3 и $N^3F_N\bar{g}^{2N+2}$ – для четырехглюонной вершины Γ_4. В силу обобщенных тождеств Уорда $\Gamma_3 \sim \gamma_3 G$, $\Gamma_4 \sim \Gamma_3^2\Delta$ главные вклады в асимптотику Γ_3 и Γ_4 сокращаются и инвариантный заряд имеет общий член разложения $NF_N\bar{g}^{2N+2}$ или $F_N\bar{g}^{2N}$ при определении по любой вершине; такой же вид имеет разложение β-функции [5]. С учетом $g = \bar{g}^2/16\pi^2$ имеем для коэффициентов ряда (1)

$$\beta_N = \text{const}\,\Gamma\left(N + 4N_c + \frac{11(N_c - N_f)}{6}\right), \tag{8}$$

что для $N_c = 2, N_f = 0$ согласуется с результатом [7].

3. Ряд (1) является знакопостоянным и возникает известная проблема интерпретации плохо определенного борелевского интеграла; в частности, его интерпретация в смысле главного значения не всегда правильна [16]. В общем случае определение гамма-функции можно записать в виде

$$\Gamma(z) = \sum_i \gamma_i \int\limits_{C_i} dx\, e^{-x} x^{z-1}\,, \qquad \sum_i \gamma_i = 1\,, \tag{9}$$

C_1, $C_2, \ldots$ – произвольные контуры, исходящие из начала координат и уходящие на бесконечность в правой полуплоскости. Преобразование Бореля ряда (1) приводит к результату

$$\beta(g) = \sum_i \gamma_i \int\limits_{C_i} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \\ B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} B_N z^N, \quad B_N = \frac{\beta_N}{\Gamma(N+b_0)}, \tag{10}$$

где b_0 – произвольный параметр. При наличии у борелевского образа $B(z)$ особенностей в правой полуплоскости контуры C_i перестают быть эквивалентными и не могут быть совмещены с положительной полуосью, как это было возможно в (9); поэтому результат суммирования зависит от выбора[4] γ_i и C_i. Мы обойдем эту проблему следующим образом. В случае степенного поведения борелевского образа на бесконечности, $B(z) \sim z^\alpha$, имеем для β-функции

$$\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha,\ g \to \infty \text{ и } \beta(g) = \bar{\beta}_\infty |g|^\alpha,\ g \to -\infty, \tag{11}$$

где точная связь β_∞ и $\bar{\beta}_\infty$ зависит от выбора γ_i и C_i, но в общем случае $\beta_\infty \sim \bar{\beta}_\infty$. Поэтому суммирование ряда (1) при отрицательных g дает возможность определить индекс α и оценить β_∞.

4. Согласно отработанному в [1, 2] алгоритму, пересуммирование знакопеременного ряда с асимптотикой коэффициентов $ca^N\Gamma(N+b)$ дает сходящийся ряд с коэффициентами разложения

$$U_N = \sum_{K=1}^{N} B_K a^{-K} (-1)^K C_{N-1}^{K-1}, \tag{12}$$

поведение которых при больших N

$$U_N = U_\infty N^{\alpha-1}, \quad U_\infty = \frac{\bar{\beta}_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha)\Gamma(b_0+\alpha)}, \tag{13}$$

[3] В аргументе гамма-функции в (7) член $M/2$ связан с количеством внешних линий, $4N_c$ есть половина числа нулевых мод, а вклад $11(N_c - N_f)/6$ возникает из-за того, что некоторые из нулевых мод при более точном рассмотрении оказываются мягкими и требуют нетривиального интегрирования. Для кваркового коррелятора интеграл (6) содержит расходимости, способ устранения которых в [10, 11] вызывает сомнения [14]; при $M \geq 1$ таких расходимостей нет.

[4] Результаты для различных γ_i и C_i отличаются на величины типа $\exp(-a/g)$ и в общем случае такие непертурбативные вклады должны добавляться к борелевскому интегралу. При правильном выборе γ_i и C_i такие вклады поглощаются борелевским интегралом и их явного учета не требуется.

определяет параметры асимптотики (11). Интерполяция коэффициентной функции производится по формуле

$$\beta_N = ca^N N^{\tilde{b}} \Gamma(N + b - \tilde{b}) \times \times \left[1 + \frac{A_1}{N - \tilde{N}} + \frac{A_2}{(N-\tilde{N})^2} + \ldots\right] \quad (14)$$

путем обрыва ряда и выбора коэффициентов A_K из соответствия с (2). Принимается оптимальная параметризация асимптотики с $\tilde{b} = b - 1/2$ [2], а параметр $\tilde{N}$ используется для контроля устойчивости результатов и оптимизации.

Как и в случае квантовой электродинамики, нам неизвестен параметр c асимптотики Липатова; в работе [3] мы определяли его в процессе интерполяции. В данном случае такая процедура приводила к большой неопределенности результатов, которую не удавалось уменьшить путем оптимизации. Поэтому мы проводили интерполяцию для пробного значения c, которое затем варьировалось в интервале[5)] от 10^{-5} до 1; фактически изменение результатов при этом было несущественно по сравнению с прочими неопределенностями. Ниже приводятся результаты для $N_c = 3$, $N_f = 0$, $c = 10^{-5}$.

Производя обработку U_N по степенному закону и рассматривая зависимости χ^2 от $\tilde{N}$, можно выделить интервал $0.5 \lesssim \tilde{N} \lesssim 2.0$, в котором значения χ^2 минимальны; это определяет множество интерполяций, совместимых со степенным поведением U_N. Типичные зависимости χ^2 и эффективных значений U_∞ и α от b_0 (рис. 1) указывают, что $\alpha \approx -15$. Действительно, смена знака U_∞ (см. (13)) происходит при $b_0 = -\alpha \approx 15.5$. При том же значении b_0 имеется минимум χ^2, соответствующий тому, что главный вклад $U_\infty N^{\alpha-1}$ исчезает из-за полюса гамма-функции в (13) и реализуется степенной закон $U_N \sim N^{\alpha'-1}$, соответствующий первой поправке к асимптотике $\beta(g)$ (предполагаем, что $\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha + \beta'_\infty g^{\alpha'} + \ldots$ при больших g). Значение α_{eff} в первом (со стороны больших b_0) минимуме χ^2 наиболее близко к точному значению $\alpha \approx -15$ ввиду исчезновения при $b_0 = -\alpha'$ главной поправки к асимптотике (13). Указанные способы оценки индекса α дают близкие результаты лишь для значений $\tilde{N}$, близких к оптимальному, $\tilde{N} = 1.58$ (рис.1), но перестают быть согласованными при удалении $\tilde{N}$ от указанного значения.

[5)] Параметр c определяется квадратом константы т'Хоофта c_H в выражении для одноинстантонного вклада [12, 13] ($c_H^2 \sim 10^{-5}$ для $N_f = 0$ и $c_H^2 \sim 10^{-4}$ для $N_f = 3$), умноженным на безразмерный интеграл от инстантонной конфигурации, который может быть довольно велик (характерный масштаб $8\pi^2$).

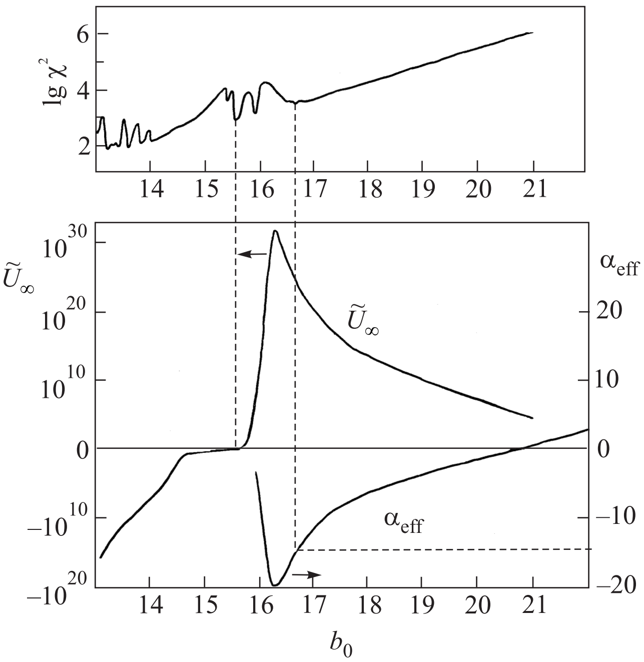

Рис.1. Зависимости χ^2, α_{eff} и $\tilde{U}_\infty = U_\infty \Gamma(b_0 + 2)$ от b_0 для оптимальной интерполяции с $\tilde{N} = 1.58$ и интервала усреднения $23 \le N \le 35$. Зависимость $\tilde{U}_\infty(b_0)$ при $|\tilde{U}_\infty| < 10$ показана схематически. Минимумы при $b_0 = 15.4$ и $b_0 = 15.9$ интерпретируются как сателлиты основного минимума ($b_0 = 15.5$) – они смещаются вместе с ним при изменении параметров

Полученный результат для индекса α не может быть сразу принят в качестве окончательного. Во-первых, большое значение индекса может имитировать экспоненту. Во-вторых, для $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$ главный вклад в асимптотику U_N исчезает из-за полюса $\Gamma(\alpha)$ (см.(13)) и наблюдаемый результат может соответствовать не основному индексу α, а, например, α' [2]. В связи с этим мы приняли в качестве исследуемой функции $W(g) = g^{n_s}\beta(g)$ и увеличивали целочисленный параметр n_s до тех пор, пока наблюдаемый индекс $\alpha_W = \alpha + n_s$ не стал положительным. Полученные результаты (рис.2а) убедительно показывают, что мы имеем дело не с экспонентой, а с большим отрицательным индексом, который не является целочисленным (при $\alpha = -n$ наблюдалось бы поведение, показанное на вставке). Каждая точка на рис.2а получена в результате независимой оптимизации по $\tilde{N}$; оптимальное значение $\tilde{N}$ систематически уменьшалось при увеличении n_s. Основная неопределенность результатов связана с зависимостью от нижней границы интервала усреднения $N_{\min} \le N \le N_{\max}$. Верхние точки на рис.2а соответствуют небольшим $N_{\min}$ и значениям χ^2 в мини-

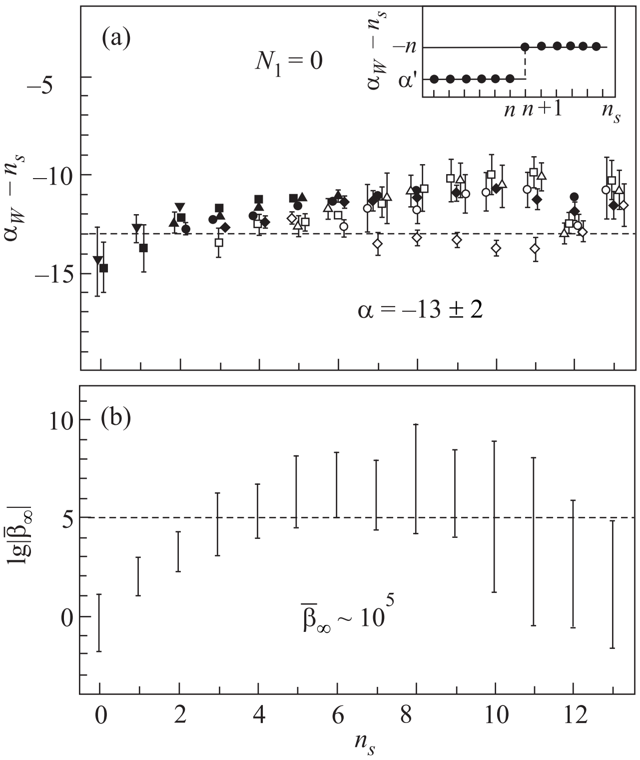

Рис.2. (a) Индекс α_W, полученный при суммировании ряда для функции $W(g) = g^{n_s}\beta(g)$, в зависимости от n_s для различных интервалов усреднения $N_{\min} \le N \le N_{\max}$: ▼ – $N_{\min} = 22 + n_s$, $N_{\max} = 35 + n_s$, точки ■, ▲, •, □, △, ○, ◊ соответствуют последовательному увеличению $N_{\min}$ на единицу. (b) Зависимость от n_s параметра $\bar\beta_\infty$

мумах $\sim 10^6$. При увеличении $N_{\min}$ результат для α систематически уменьшается, пока χ^2 не достигает уровня $\sim 10^3$ (нижние точки). При дальнейшем увеличении $N_{\min}$ картина минимумов χ^2 становится нечеткой и неопределенность результатов резко возрастает. Мы допускаем возможность еще некоторого уменьшения α до достижения требуемых значений $\chi^2 \sim 10$ и учитываем это при оценке ошибки. Неопределенность параметра $\bar\beta_\infty$ составляет несколько порядков (рис.2b), но наиболее вероятно значение $\sim 10^5$, совместимое с основным массивом данных. Итак, для $N_f = 0$ имеем

$$\alpha = -13 \pm 2, \quad \bar\beta_\infty \sim 10^5. \qquad (15)$$

При $N_f = 3$ имеем $\alpha = -12 \pm 3$ и тот же результат для наиболее вероятного значения $\bar\beta_\infty$ (тогда как полный разброс $\bar\beta_\infty = 1 \div 10^7$). Устойчивость результатов при изменении процедуры суммирования указывает на адекватную оценку их неопределенности. Некоторая недооценка ошибки возможна из-за эффектов нелинейности [3] или затянутости выхода на асимптотику.

Большая неопределенность $\bar\beta_\infty$ соответствует сравнительно небольшой неопределенности для самой β-функции: для характерного масштаба g^*, на котором происходит сшивка однопетлевого закона $\beta_2 g^2$ с асимптотикой (11), получим $g^* \sim 2$ и вариация g^* в два раза соответствует изменению $\bar\beta_\infty$ на 4 порядка. Знак $\bar\beta_\infty$ в области отрицательных α_W оказывается неопределенным из-за большой погрешности в α и знакопеременности множителя $\Gamma(\alpha)$ в (13), но в области положительных α_W (большие n_s) он однозначно отрицательный. Поведение β-функции при $g < 0$ показано на рис.3 (сплошная кривая); при аналитическом продолжении на поло-

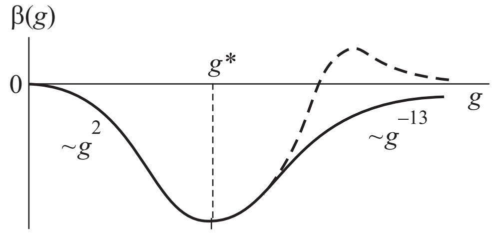

Рис.3

жительные g оно качественно сохраняется, но знак асимптотики (11) может измениться (штриховая кривая)[6]. Тем не менее, поведение эффективной константы связи от масштаба расстояний L оказывается достаточно определенным (рис.4). Как известно, в однопетлевом приближении $g(L)$ имеет полюс при $L = L_0 = 1/\Lambda_{QCD}$ (штриховая кривая);

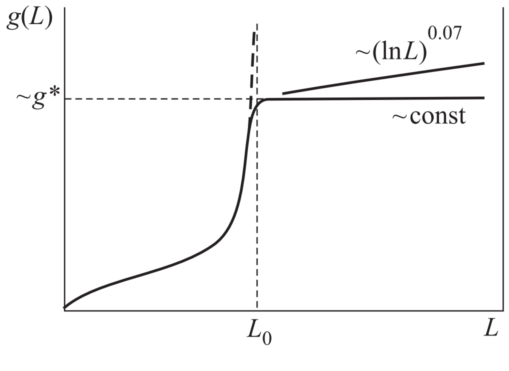

Рис.4

для найденной β-функции (рис.3) рост вблизи L_0 продолжается до значений $\sim g^*$, после чего $g(L)$ либо выходит на константу (при $\beta_\infty > 0$), либо растет

[6] Например, $\beta_\infty = \bar\beta_\infty \cos \pi\alpha$ при интерпретации борелевского интеграла в смысле главного значения.

по закону $(\ln L)^{0.07}$, практически не отличимому от константы (при $\beta_\infty < 0$).

В области слабой связи взаимодействие $V(L)$ между кварками описывается модифицированным законом Кулона $\bar{g}^2(L)/L$ и резкий рост $\bar{g}(L)$ вблизи $L = L_0$ указывает на тенденцию к конфайнменту. В области сильной связи соотношение между $V(L)$ и $\bar{g}(L)$ неизвестно, но близкий по смыслу результат получен Вильсоном для решеточной версии КХД [17]:

$$V(L) = \frac{\ln 3\,\bar{g}^2(a)}{a^2}L, \qquad \bar{g}(a) \gg 1 \tag{16}$$

где a – постоянная решетки. Условие независимости результата от a дает оценку β-функции в области сильной связи, $\beta(g) \sim g\ln g$ [18], что, однако, является неверным. В области $a \gg 1/\Lambda_{QCD}$ поперечный размер струны оказывается $\sim a$ и существенно превышает ее реальный физический размер $\sim 1/\Lambda_{QCD}$; поэтому решетка вносит сильные искажения и нет оснований ожидать независимости результата от a. В области $a \ll 1/\Lambda_{QCD}$ такие основания появляются, но константа связи $\bar{g}(a)$ становится малой и формула (16) выходит из области применимости. Таким образом, соотношение (16) может иметь смысл лишь при $a \sim 1/\Lambda_{QCD}$. В области насыщения $\bar{g}(L) \sim \sqrt{2\cdot 16\pi^2} \sim 20$ и резкий рост $g(L)$ вблизи $L = L_0$ (рис.4) делает совместимыми условия $a \sim 1/\Lambda_{QCD}$, $\bar{g}(a) \gg 1$, что, по-видимому позволяет обосновать применение решеточной формулы (16) к реальной КХД.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант # 99-1070) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 00-02-17129), а также Российского фонда поддержки отечественной науки.

---

1. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000).
2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
3. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).
4. D. I. Kazakov, *Proc. Conf. QUARKS-80*, Sukhumi, 1980, INR, Moscow, 1981, p. 52.
5. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
6. T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin, Phys. Lett. **B400**, 379 (1997).
7. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. **B71**, 93 (1977).
8. L. N. Lipatov, A. P. Bukhvostov, and E. I. Malkov, Phys. Rev. **D19**, 2974 (1979).
9. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. N. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A – Physics Reviews, Ed. I. M. Khalatnikov, **2**, Harwood Academic Press, NY, 1980, p. 247.
10. I. I. Balitsky, Phys. Lett. **B273**, 282 (1991).
11. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. **B463**, 489 (1996).
12. G. t'Hooft, Phys. Rev. **D14**, 3433 (1976).
13. C. Bernard, Phys. Rev. **D19**, 3013 (1979).
14. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
15. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
16. R. Seznec and J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 398 (1979).
17. K. Wilson, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
18. C. Callan, R. Dashen, and D. Gross, Phys. Rev. **D20**, 3279 (1979).