Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 12, с. 859 – 862

О дробных расширениях классического изотропного осциллятора и задачи Кеплера

В. М. Елеонский, В. Г. Королев[1], *Н. Е. Кулагин*

Научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф. В. Лукина, 124460 Зеленоград, Москова, Россия

Поступила в редакцию 31 октября 2002 г.

Рассмотрен класс "дробных" гамильтоновых систем, обобщающий классическую задачу о двумерном (2D) изотропном гармоническом осцилляторе и задачу Кеплера. Показано, что в 4D пространстве структурных параметров 2D изотропный гармонический осциллятор может быть продолжен вдоль кривой так, что сохраняются замкнутость орбит и изохронность колебаний. Аналогично, задача Кеплера может быть продолжена вдоль кривой таким образом, что сохраняются замкнутость орбит всех финитных движений и третий закон Кеплера. Указанные кривые лежат на 2D поверхностях, на которых любая динамическая система характеризуется одинаковым числом вращения орбит всех финитных движений.

PACS: 03.20.+i, 95.10.Ce

Известно [1, 2], что в классе гамильтоновых систем с двумя степенями свободы $H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + U(|\mathbf{r}|)$ орбиты всех финитных движений замкнуты в двух случаях: в задаче Кеплера ($U = -1/|\mathbf{r}|$) и в изотропном гармоническом осцилляторе. Известно также, что в первом случае это связано со скрытой симметрией (дополнительным вырождением) задачи Кеплера, обусловленной существованием, наряду с интегралами энергии и момента, третьего интеграла движения [3].

В настоящей работе показано, что класс гамильтонианов, обладающих такими свойствами, может быть существенно расширен при переходе к так называемым "дробным" системам. Ниже рассмотрен класс гамильтонианов

$$H = p^{\alpha_1} r^{\beta_1} + \sigma p^{\alpha_2} r^{\beta_2}, \tag{1}$$

где $r = |\mathbf{r}|$; $p = |\mathbf{p}|$; $\mathbf{r}, \mathbf{p} \in R^2$ и $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma$ – вещественные параметры. Этот класс включает в себя, в частности, гамильтониан частицы в центральном поле с потенциалом $U \sim r^{\beta_2}$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = \alpha_2 = 0$.

Динамика гамильтоновых систем класса (1) исследовалась нами с помощью подхода, изложенного в [4, 5]. Изложим кратко его суть. Рассмотрим функцию Гамильтона вида $H = H(p, r)$. Записывая векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ в полярных координатах (p, ψ) и (r, φ) и переходя к новым угловым переменным $\Psi = \psi + \varphi$, $\Phi = \psi - \varphi$, получаем из соответствующих гамильтоновых уравнений следующие (неканонические) уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p}\cos\Phi, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r}\cos\Phi, \\ \dot{\Phi} &= \left(\frac{1}{p}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial p}\right)\sin\Phi, \\ \dot{\Psi} &= \left(\frac{1}{p}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial p}\right)\sin\Phi, \end{aligned} \tag{2}$$

обладающие первыми интегралами

$$M = r\,p\sin\Phi = \text{const}, \qquad E = H(p, r) = \text{const}. \tag{3}$$

Исключение p и r в уравнениях движения (2) приводит к следующей системе уравнений для угловых переменных (Ψ, Φ):

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} &= \operatorname{ctg}\Phi\left\{2(\dot{\Phi})^2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{4D}(\zeta_1\dot{\Phi} - \theta_1\dot{\Psi})(\zeta_2\dot{\Phi} - \theta_2\dot{\Psi})\right\}, \\ \ddot{\Psi} &= \operatorname{ctg}\Phi\left\{2\dot{\Phi}\dot{\Psi} + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{4D}(\zeta_1\dot{\Phi} - \theta_1\dot{\Psi})(\zeta_2\dot{\Phi} - \theta_2\dot{\Psi})\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\zeta_i = \beta_i + \alpha_i$, $\theta_i = \beta_i - \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ и $D = \beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Конфигурационное пространство динамической системы отождествим с поверхностью единичной сферы (Φ и Ψ – полярный и азимутальный углы). Подчеркнем, что произвольные действительные показатели степеней α_i, β_i в функции Гамильтона (1) входят только в коэффициенты уравнений (4), что существенно облегчает анализ последних.

Динамическая система (4) обладает парой интегралов движения:

$$I_1 = \frac{1}{D\sin^2\Phi}[(\theta_2 - \theta_1)\dot{\Psi} - (\zeta_2 - \zeta_1)\dot{\Phi}], \tag{5}$$

$$I_2 = (\sin\Phi)^{D - 2(\theta_2 - \theta_1)}\left[\frac{\theta_2\dot{\Psi} - \zeta_2\dot{\Phi}}{2D}\right]^{\theta_2}\left[\frac{\theta_1\dot{\Psi} - \zeta_1\dot{\Phi}}{-2\sigma D}\right]^{-\theta_1}.$$

[1] e-mail: korolev@nonlin.msk.ru

При этом $I_1 = 2E/M$, $I_2 = M^{D-(\theta_2-\theta_1)}$. Предполагается, что $M \neq 0$ и исключены отрицательные значения оснований всех степеней.

Исключая из первого уравнения в (5) угловую скорость $\dot{\Psi}$, приходим к уравнениям

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\Phi_0}\left[1-\frac{1}{\nu_2}\frac{\Phi'}{\sin^2\Phi}\right]^{\nu_2}\left[1-\frac{1}{\nu_1}\frac{\Phi'}{\sin^2\Phi}\right]^{-\nu_1}=1, \quad (6)$$

$$\Psi' = \frac{2}{D}\frac{\sin^2\Phi}{\nu_2-\nu_1}+\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\nu_2-\nu_1}\Phi', \quad (7)$$

где $\Phi' = d\Phi/d\tau$, $\tau = (M/ED)\,t$, $\nu_1 = \theta_1/D$, $\nu_2 = \theta_2/D$, а величина $\sin^2\Phi_0 < 1$ определена (для финитных движений) соотношением

$$\frac{E^{\nu_2-\nu_1}}{M}\sin^2\Phi_0\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\right)^{\nu_2}\left(\frac{-\nu_1}{\sigma(\nu_2-\nu_1)}\right)^{-\nu_1}=1. \quad (8)$$

Мы видим, что

$$\Phi(\tau) = \Phi(\tau;\, \nu_1, \nu_2|\, E, M),$$
$$\Psi(\tau) = \Psi(\tau;\, \nu_1, \nu_2, D, \zeta_2-\zeta_1\,|\, E, M). \quad (9)$$

Общее движение изображающей точки на сфере представляет собой вращение по азимутальному углу Ψ, сопровождаемое периодическими колебаниями по полярному углу Φ.

Из уравнения (6) можно получить выражение для периода колебаний T полярного угла $\Phi(t)$ и найти выражение для числа вращения N траектории на сфере (определенного как приращение азимутального угла Ψ на периоде полярного угла Φ, отнесенное к 2π):

$$N = \frac{\sin\Phi_0}{\pi\nu_1\nu_2 D}\int_{z_-}^{z_+}\frac{(1-z/\nu_2)^{-1}\,(1-z/\nu_1)^{-1}\;dz}{\sqrt{(1-z/\nu_2)^{2\nu_2}\,(1-z/\nu_1)^{-2\nu_1}-\sin^2\Phi_0}}. \quad (10)$$

Здесь $z_\pm$ $(z_- < z_+)$ – корни уравнения

$$\left(1-\frac{z}{\nu_2}\right)^{2\nu_2}\left(1-\frac{z}{\nu_1}\right)^{-2\nu_1}=\sin^2\Phi_0 \quad (11)$$

Подчеркнем, что, несмотря на то, что функция $\Psi(t)$ зависит от комбинации $\zeta_2-\zeta_1$, число вращения N от нее не зависит. Это означает, что, зафиксировав в 4D пространстве структурных параметров $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ значения трех их комбинаций: $\theta_1 = \beta_1-\alpha_1$, $\theta_2 = \beta_2-\alpha_2$ и $D = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, мы получаем прямые

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 + k_1\gamma, \qquad \beta_1 = \beta_1^0 + k_1\gamma,$$
$$\alpha_2 = \alpha_2^0 + k_2\gamma, \qquad \beta_2 = \beta_2^0 + k_2\gamma \quad (12)$$

$(k_2/k_1 = (\beta_2-\alpha_2)/(\beta_1-\alpha_1)$, γ – параметр прямой), вдоль которых сохраняется зависимость числа вращения N от постоянных первых интегралов E и M. Каждой прямой (12) отвечает однопараметрическое семейство функций Гамильтона

$$H = p^{\alpha_1^0}r^{\beta_1^0}(rp)^{k_1\gamma}+\sigma\,p^{\alpha_2^0}r^{\beta_2^0}(rp)^{k_2\gamma}. \quad (13)$$

Дробное продолжение задачи Кеплера. На прямой (12), проходящей через точку ($\alpha_1^0 = 2$, $\beta_1^0 = \alpha_2^0 = 0$, $\beta_2^0 = -1$), отвечающую задаче Кеплера, имеем $D = -2$, $\nu_1 = +1$, $\nu_2 = 1/2$; при этом

$$\alpha_1 = 2+\gamma, \quad \beta_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma}{2}, \quad \beta_2 = -1+\frac{\gamma}{2}. \quad (14)$$

Из уравнения (6) определяется пара ветвей функции $t = t(\Phi)$:

$$\frac{\sigma^2(\sin\Phi_0)^3}{2M^3}(t-t_i) = \quad (15)$$
$$= \left\{\sin\Phi_0\cdot\mathrm{ctg}\Phi \mp \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{ctg}\Phi}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\Phi_0-\mathrm{ctg}^2\Phi}}\right\}\Bigg|_{\Phi_i}^{\Phi}.$$

Интегрируя по циклу $\Phi_0^- \Rightarrow \Phi_0^+ \Rightarrow \Phi_0^-$ $(0 < \Phi_0^- \leq \pi/2 \leq \Phi_0^+ < \pi)$, находим, что период колебаний функции $\Phi(t)$ подчиняется зависимости $T(E) \propto (-E)^{-3/2}$, то есть, третьему закону Кеплера, при любом γ. Интегрируя по циклу уравнение

$$\frac{d\Psi}{d\Phi}+(\gamma-1) = \pm\frac{2\sin\Phi}{\sqrt{\sin^2\Phi-\sin^2\Phi_0}}, \quad (16)$$

находим, что приращение Ψ на периоде полярного угла равно 2π независимо от (E, M) и параметра γ.

Таким образом, в системах однопараметрического семейства

$$H = p^2(rp)^\gamma + \frac{\sigma}{r}(rp)^{\gamma/2} \quad (17)$$

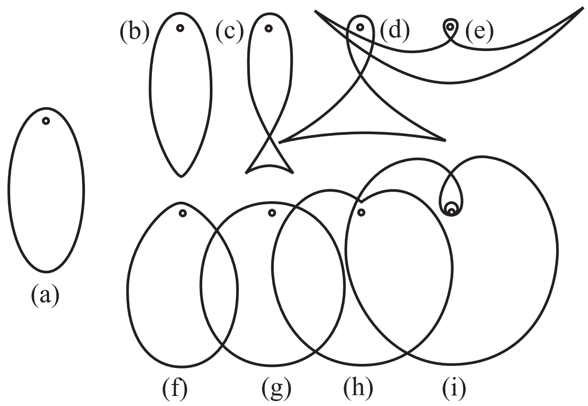
все финитные орбиты на сфере замкнуты при любом γ и выполнен третий закон Кеплера. При этом форма орбит зависит от γ. Нетрудно показать, что условия замыкания орбиты на плоскости (r, φ) также выполняются при всех значениях γ.

Наконец, приведем формулы преобразования орбит на плоскости (r, φ) при изменении параметра γ:

$$r = 2\left(\frac{M}{\sin\Phi}\right)^{\gamma} r^0(\Phi), \quad r' = 2\left(\frac{M}{\sin\Phi}\right)^{\gamma'} r^0(\Phi),$$
$$\Phi = \Phi_0^- - 2\frac{\varphi'-\varphi}{\gamma'-\gamma}, \quad (18)$$

где (r,φ) и (r',φ') – точки соответствующих орбит для динамических систем с гамильтонианом (17), отвечающих значениям γ и γ'. В частности, эти формулы позволяют найти выражение для третьего интеграла движения при $\gamma \neq 0$ по известному выражению для случая $\gamma = 0$ (то есть задачи Кеплера). Это означает, что все динамические системы семейства (17) сохраняют скрытую симметрию задачи Кеплера.

На рисунке изображена деформация орбит на плоскости (r,φ) при изменении параметра γ, под-



Характерная трансформация орбит при движении вдоль однопараметрического многообразия (14): (a) $\gamma = 0$ (задача Кеплера); (b) $\gamma = -0.15$; (c) $\gamma = -0.45$; (d) $\gamma = -1$; (e) $\gamma = -2$; (f) $\gamma = 0.45$; (g) $\gamma = 1$ (все орбиты – окружности с центром, смещенным относительно начала координат); (h) $\gamma = 2$ (все орбиты имеют форму улиток Паскаля); (i) $\gamma = 4$

твержденная при численных расчетах. Возникновение особенностей на орбитах связано с реализацией (в определенных интервалах значений γ) условий $\dot r = 0$, $\dot\varphi = 0$ (то есть, $\Phi = \pi/2$, $\partial H/\partial p = 0$). Отметим, что "возвратное" движение по орбите (смена знака $\dot\varphi$) не связано с изменением направления вектора момента импульса: на участках "обратного" движения вектор скорости направлен противоположно вектору импульса.

Дробное продолжение задачи о гармоническом осцилляторе. Рассмотрим теперь прямую вида (12), проходящую через точку ($\alpha_1^0 = 2$, $\beta_1^0 = \alpha_2^0 = 0$, $\beta_2^0 = 2$), которая отвечает задаче о гармоническом осцилляторе. На этой прямой $D = 4$, $\nu_1 = -1/2$, $\nu_2 = 1/2$; при этом

$$\alpha_1 = 2+\gamma, \quad \beta_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = -\gamma, \quad \beta_2 = 2-\gamma. \tag{19}$$

Уравнения (6), (7) принимают вид

$$\dot\Phi = \pm 2\sigma^{1/2}\sin\Phi\sqrt{\frac{\sin^2\Phi}{\sin^2\Phi_0} \pm 1},$$
$$\dot\Psi = \frac{2E}{M}\sin^2\Phi - \gamma\dot\Phi.$$

Здесь $\sin^2\Phi_0 = \sigma M^2/E^2$, а дифференцирование проводится по исходной независимой переменной t. Интегрируя первое из уравнений (при выборе нижнего знака под радикалом), определяем пару ветвей функции $t = t(\Phi)$:

$$2\sigma^{1/2}(t - t_i) = \mp \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\Phi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\Phi_0 - \operatorname{ctg}^2\Phi}}\Bigg|_{\Phi_i}^{\Phi}. \tag{20}$$

Интегрируя по циклу $\Phi_0^- \Rightarrow \Phi_0^+ \Rightarrow \Phi_0^-$, находим, что период функции $\Phi(t)$ равен $T = \sigma^{-1/2}$ и не зависит ни от (E,M), ни от параметра γ. Азимутальный угол Ψ, рассматриваемый как функция от Φ, определяется выражением

$$\Psi - \Psi_i = \mp \arcsin\frac{\cos\Phi}{|\cos\Phi_0|}\Bigg|_{\Phi_i}^{\Phi} - \gamma(\Phi - \Phi_i). \tag{21}$$

Приращение Ψ на периоде T полярного угла Φ равно π при всех γ, то есть деформация орбит не нарушает их замкнутости. При этом $r(t+T,\gamma) = r(t,\gamma)$ и $\varphi(t+T,\gamma) = \varphi(t,\gamma) + \pi$. Таким образом, все динамические системы с гамильтонианами

$$H = p^2(rp)^\gamma + \sigma r^2(rp)^{-\gamma} \tag{22}$$

изохронны, а все орбиты финитных движений в этих системах замкнуты.

Двухпараметрические семейства. При условии $\theta_1 \neq \theta_2$ каждой паре действительных чисел (ν_1,ν_2) отвечает 2D поверхность в 4D пространстве структурных параметров, определяемая двумя линейными связями, наложенными на величины θ_1, θ_2 и D:

$$\theta_1 = \nu_1 D, \qquad \theta_2 = \nu_2 D. \tag{23}$$

Пусть такая пара чисел (и тем самым соответствующая поверхность) задана. При этом для каждого фиксированного значения любой из трех величин θ_1, θ_2 и D (для определенности, D) формулы (23) однозначно определяют значения двух других величин; то есть каждому значению D отвечает некоторая прямая вида (12), лежащая на данной поверхности. Таким образом, каждая поверхность вида (23) расслаивается прямыми (12).

Среди таких 2D поверхностей выделяются три, обладающие специальными свойствами и допускающие полный анализ соответствующих динамических систем. Они связаны с простейшими типами соизмеримости чисел ν_1 и ν_2. А именно, это поверхность μ_1: ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1/2$), поверхность μ_2: ($\nu_1 = -1/2$, $\nu_2 = 1/2$) и поверхность μ_3: ($\nu_1 = 1/2$, $\nu_2 = 1$), переводимая в μ_1 очевидной перестановкой $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$ (поверхность μ_2 при такой перестановке индексов переходит сама в себя).

Поверхность μ_1 содержит точку, отвечающую задаче Кеплера; она может быть записана в виде

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2, \qquad \beta_1 - 2\beta_2 = 2 \tag{24}$$

и параметризована следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -D + \gamma, & \beta_1 &= \gamma, \\ \alpha_2 &= -D/2 + \gamma/2 - 1, & \beta_2 &= \gamma/2 - 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Функция Гамильтона, отвечающая произвольной точке с параметрами $D \neq 0$ и γ на поверхности μ_1, имеет вид

$$H = p^{-D}(rp)^{\gamma} - |\sigma|\, p^{-D/2}(rp)^{\gamma/2-1}. \tag{26}$$

Пара ветвей функции $t = t(\Phi)$ определяется выражениями (15) при замене $\sigma^2/2M^3 \Rightarrow D\sigma^2/2M^3$. Это означает, что $T \propto \frac{2}{D}\,(-E)^{-3/2}$.

Анализ показывает, что в любой динамической системе (26) на поверхности μ_1 все финитные орбиты характеризуются одинаковым числом вращения $N = 2/|D|$. Таким образом, зафиксировав в выражениях (25) величину D, мы получаем прямую, лежащую на поверхности μ_1, вдоль которой все системы характеризуются одним и тем же числом вращения (общим для всех финитных орбит). В частности, полагая $D = -2$, мы получаем рассмотренную ранее линию (14), проходящую через точку, соответствующую задаче Кеплера. На прямых, отвечающих рациональным значениям D, все финитные орбиты замкнуты, а на прямых, отвечающих иррациональным значениям D, все финитные орбиты разомкнуты.

Поверхность μ_2 проходит через точку, отвечающую задаче о гармоническом осцилляторе; она записывается в виде

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 2 \tag{27}$$

и может быть параметризована следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= D/2 + \gamma, & \beta_1 &= -D/2 + 2 + \gamma. \\ \alpha_2 &= -D/2 + 2 - \gamma, & \beta_2 &= D/2 - \gamma. \end{aligned} \tag{28}$$

Она также расслаивается прямыми, вдоль которых сохраняется число вращения. А именно, число вращения равно $2/|D|$ для всех орбит любой системы с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p^{D/2}}{r^{-2+D/2}}(rp)^{\gamma} + |\sigma|\frac{r^{D/2}}{p^{-2+D/2}}(rp)^{-\gamma}. \tag{29}$$

В частности, полагая $D = 4$, мы получим ранее рассмотренную прямую (19), проходящую через точку, соответствующую гармоническому осциллятору.

Численный анализ указывает на то, что тремя перечисленными двухпараметрическими семействами исчерпываются все системы из класса (1), в которых орбиты всех финитных движений в системе имеют одинаковое число вращения.

Итак, в работе исследован класс дробных гамильтоновых систем вида (1). Показано, что при $\sigma < 0$ существует однопараметрическое семейство гамильтонианов вида (1), обобщающих задачу Кеплера, для которых все финитные орбиты замкнуты и справедлив третий закон Кеплера. При изменении параметра семейства орбиты деформируются. Но при этом все представители семейства обладают скрытой симметрией (дополнительным интегралом движения).

При $\sigma > 0$ существует однопараметрическое семейство гамильтонианов вида (1), наследующих от 2D изотропного гармонического осциллятора, наряду с замкнутостью орбит, изохронность колебаний (уже нелинейных) при всех $E > 0$. Все представители этого семейства также обладают скрытой симметрией.

Более того, в каждом из случаев $\sigma < 0$ и $\sigma > 0$ соответствующее однопараметрическое семейство является частным случаем некоторого двухпараметрического семейства функций Гамильтона, для каждой из которых все финитные движения характеризуются одинаковым числом вращения. Орбиты всех финитных движений замкнуты, если это число рационально, и разомкнуты в противном случае.

Авторы благодарят профессора В. И. Юдовича за полезные обсуждения результатов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М.: Наука, 1988.
2. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1989.
3. В. М. Алексеев, *Лекции по небесной механике*, Ижевск: РХД, 2000.
4. В. М. Елеонский, В. Г. Королев, Н. Е. Кулагин, *Тезисы Международной конференции "Progress in Nonlinear Science"*, Нижний Новгород, Россия, 2–6 июля, 2001 г.
5. В. М. Елеонский, В. Г. Королев, Н. Е. Кулагин, *Тезисы Международной конференции "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность"*, Москва, Россия, 10–17 февраля, 2002 г.