Письма в ЖЭТФ, том 74, вып. 1, с. 61 – 65 

# Косет-теория $\widehat{s\ell}(2) \oplus \widehat{s\ell}(2)/\widehat{s\ell}(2)$ есть гамильтонова редукция супералгебры $\widehat{D}(2|1;\alpha)$

*А. М. Семихатов, Б. Л. Фейгин**

*Отделение теоретической физики им. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Россия*

** Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 2001 г.

После переработки 31 мая 2001 г.

Показано, что косет-теория $\widehat{s\ell}(2)_{k_1} \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k_2}/\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$ является квантовой гамильтоновой редукцией исключительной аффинной супералгебры Ли $\widehat{D}(2|1;\alpha)$. $W$-алгебра этой теории является, кроме того, коммутантом квантовой группы $\mathcal{U}_q D(2|1;\,\alpha)$.

PACS: 02.20.Uw, 11.25.Hf

В работе обнаружена связь между двумя структурами в двумерной конформной теории поля: i) хорошо известными косет-моделями $\widehat{s\ell}(2)_{k_1} \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k_2}/\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$ и ii) исключительной аффинной супералгеброй Ли $\widehat{D}(2|1;\alpha)$:

$$\text{Квантовая гамильтонова редукция}[\widehat{D}(2|1;\alpha)_\varkappa] = \\ = \widehat{s\ell}(2)_{k_1} \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k_2} \,/\, \widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2} \quad (1)$$

(при общих значениях параметров). Этот результат представляется нетривиальным ввиду популярности косет-моделей $\widehat{s\ell}(2) \oplus \widehat{s\ell}(2)/\widehat{s\ell}(2)$ (то же, что $\widehat{su}(2) \oplus \widehat{su}(2)/\widehat{su}(2)$) – они много изучались с различных точек зрения, но присутствия там алгебры $\widehat{D}(2|1;\alpha)$ замечено не было. Сама же алгебра $\widehat{D}(2|1;\alpha)$ появлялась в моделях конформной теории поля лишь в [1] (где была построена ее частичная гамильтонова редукция к $N=4$ суперконформной алгебре) и недавно в [2] (в конструкции вертекс-операторного расширения $\widehat{s\ell}(2)_k \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k'}$); эта алгебра, являющаяся исключительной в классификации алгебр Ли [3], остается поэтому достаточно "исключительным" объектом в моделях конформной теории поля. Тем интереснее, что она оказывается скрытой в указанных косет-теориях. Рассматриваемая редукция *максимальна* (все токи со значениями в нильпотентной подалгебре подчинены связям), а нильпотентная подалгебра соответствует выбору простых корней фермионными.

Равенство (1) требует описания связи параметров в левой и правой частях. Для этого напомним, что определение косет-теории инвариантно относительно перестановок трех уровней $k_1$, $k_2$ и $k_3 = -k_1 - k_2 - 4$, а параметр $\alpha$ определен по модулю дискретной группы преобразований порядка 6; кроме того, уровень $\varkappa$ в левой части можно выбрать равным уровню любой из трех $\widehat{s\ell}(2)$-подалгебр в $\widehat{D}(2|1;\alpha)$, так что вместо параметра $\alpha$ и уровня $\varkappa$ удобно задавать эти три уровня $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ (они связаны соотношением $1/\varkappa_1+1/\varkappa_2+1/\varkappa_3 = 0$). Тогда имеем $\varkappa_1 = 1/(k_1+2)$, $\varkappa_2 = 1/(k_2+2)$, $\varkappa_3 = -1/(k_1+k_2+4)$ и по модулю указанного произвола $\alpha = -1-(k_1+2)/(k_2+2)$.

Кроме (1), мы показываем, что алгебра локальных полей косет-теории совпадает с *$W$-алгеброй $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$, определяемой системой корней супералгебры Ли $D(2|1;\alpha)$*:

$$\widehat{s\ell}(2)_{k_1} \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k_2} \,/\, \widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2} = \mathcal{W}D(2|1;\alpha). \quad (2)$$

Поясним, как определяется правая часть. Как известно, для бозонной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (собственно, системы корней) $W$-алгебра $\mathcal{W}\mathfrak{g}$ задается как *коммутант* операторов (называемых в этом контексте скринингами), реализующих нильпотентную подалгебру квантовой группы $\mathcal{U}_q\mathfrak{g}$. Скрининги $\sigma_i = \oint e^{\mathbf{a}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}}$ строятся через свободные поля $\boldsymbol{\varphi}$ взятием векторов простых корней $\boldsymbol{\alpha}_i$ и заменой их на $\mathbf{a}_i = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\alpha}_i$ (центральный заряд получающейся $W$-алгебры зависит от введенного параметра $\kappa$). Для *супер*алгебры Ли $\mathfrak{g}$, все нечетные корни которой изотропны (в частности, для $D(2|1;\alpha)$), мы определяем $\mathcal{W}\mathfrak{g}$ как и в бозонном случае, но с тем отличием, что оператор, соответствующий каждому нечетному корню $\alpha_i$, заменяется на $\oint e^{\mathbf{a}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}}$, где $\mathbf{a}_i$ таковы, что $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i = 1$ и набор всех скринингов удовлетворяет нильпотентной подалгебре в $\mathcal{U}_q\mathfrak{g}$. Операторы вида $\oint e^{\mathbf{a}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}}$, где $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i = 1$, будем называть *фермионными скринингами*, а все другие скрининги – бозонными.

Опишем основные шаги, приводящие к (1) и (2).

**1. Напоминание: супералгебра** $D(2|1;\alpha)$ [3]. Супералгебра $D(2|1;\alpha)$ размерности (9|8) имеет четную часть $s\ell(2)\oplus s\ell(2)\oplus s\ell(2)$, действие которой на нечетной части есть произведение двумерных представлений. Эта алгебра допускает систему корней, в которой все три простых корня являются фермионными; генераторы Шевалле $\psi_i$, $i = 1,2,3$, удовлетворяют соотношениям $[\psi_1,\psi_1] = 0$, $[\psi_2,\psi_2] = 0$, $[\psi_3,\psi_3] = 0$ (где $[\ ,\ ]$ обозначает *супер*коммутатор) и $[\psi_2,[\psi_1,\psi_3]] + (\alpha+1)[\psi_3,[\psi_1,\psi_2]] = 0$. Нильпотентная подалгебра поэтому содержит также три четных элемента

$$e^{(1)} = \frac{\varkappa_1}{2}[\psi_2,\psi_3],\ e^{(2)} = \frac{\varkappa_2}{2}[\psi_1,\psi_3],\ e^{(3)} = \frac{\varkappa_3}{2}[\psi_1,\psi_2]$$

(являющихся верхнетреугольными генераторами трех $s\ell(2)$-подалгебр) и еще один нечетный элемент $\psi_0 = [\psi_1, e^{(1)}] = [\psi_2, e^{(2)}] = [\psi_3, e^{(3)}]$. Здесь $1/\varkappa_1 + 1/\varkappa_2 + 1/\varkappa_3 = 0$, а параметр $\alpha$ определяется тогда как $\alpha = -1 - (\varkappa_3/\varkappa_2)$.

**2. Гамильтонова редукция $\widehat{D}(2|1;\alpha)$.** Гамильтонова редукция супералгебр может требовать введения вспомогательных полей, используемых при наложении связей. Для алгебры $\widehat{D}(2|1;\alpha)$ имеется несколько "естественных" выборов таких полей и связей. Рассматриваемая нами схема несимметрична по отношению к трем фермионным корням. А именно, введем свободную фермионную систему $\eta,\xi$ с операторным произведением $\eta(z)\,\xi(w) = 1/(z-w)$ и наложим связи $\psi_1(z) = \eta(z)$, $\psi_2(z) = \eta(z)$, $\psi_3(z) = \xi(z)$ и соответственно $e^{(1)}(z) = -\varkappa_1/2$, $e^{(2)}(z) = -\varkappa_2/2$, $e^{(3)}(z) = 0$ и $\psi_0(z) = 0$. Для построения соответствующего БРСТ-дифференциала введем духи – бозонные и фермионные системы первого порядка с соответствующими операторными произведениями $\beta_i(z)\,\gamma_j(w) = -\delta_{ij}/(z-w)$, $B_i(z)\,C_j(w) = \delta_{ij}/(z-w)$. Тогда БРСТ-дифференциал равен $\mathcal{Q} = \oint(\mathcal{J}^{(0)} + \mathcal{J}^{(1)} + \mathcal{J}^{(2)})$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(0)} &= \psi_1\gamma_1 + \psi_2\gamma_2 + \psi_3\gamma_3 + e^{(1)}C_1 + e^{(2)}C_2 + \\ &+ e^{(3)}C_3 + \psi_0\gamma_0 - \frac{2}{\varkappa_1}B_1\gamma_2\gamma_3 - \frac{2}{\varkappa_2}B_2\gamma_3\gamma_1 - \\ &- \frac{2}{\varkappa_3}B_3\gamma_1\gamma_2 - \beta_0\gamma_1C_1 - \beta_0\gamma_2C_2 - \beta_0\gamma_3C_3, \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(1)} &= -\gamma_1\eta - \gamma_2\eta - \gamma_3\xi,\\ \mathcal{J}^{(2)} &= \frac{\varkappa_1}{2}C_1 + \frac{\varkappa_2}{2}C_2. \qquad (4)\end{aligned}$$

Результатом редукции являются когомологии этого БРСТ-оператора. Точнее, поскольку были введены вспомогательные поля $\eta$ и $\xi$, когомологии $\mathcal{Q}$ заведомо содержат алгебру Гайзенберга, а нашей целью является обнаружить в когомологиях с нулевым духовым числом $W$-алгебру, коммутирующую с этой алгеброй Гайзенберга $\mathcal{H}_0$. Легко найти ток, порождающий алгебру $\mathcal{H}_0$:

$$\widetilde{H} = 2h^{(3)} + 2B_3C_3 + \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 + \eta\xi,$$

где $h^{(i)}$ – картановские токи трех $\widehat{s\ell}(2)$-подалгебр в $\widehat{D}(2|1;\alpha)$. Далее заметим, что когомологии $\mathcal{Q}$ содержат также зависящее от параметра $j$ семейство тензоров энергии-импульса

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{(j)} &= \mathcal{T} + \partial B_1C_1 + \partial B_2C_2 + (2j-3)B_3\partial C_3 + \\ &+ 2(j-1)\partial B_3C_3 + (j-1)\beta_0\partial\gamma_0 + j\partial\beta_0\gamma_0 + \\ &+ (j-2)\beta_1\partial\gamma_1 + (j-1)\partial\beta_1\gamma_1 + (j-2)\beta_2\partial\gamma_2 + \\ &+ (j-1)\partial\beta_2\gamma_2 + (1-j)\beta_3\partial\gamma_3 + (2-j)\partial\beta_3\gamma_3 + \\ &+ (j-2)\eta\partial\xi + (j-1)\partial\eta\xi + \partial h^{(1)} + \\ &+ \partial h^{(2)} + 2(j-1)\partial h^{(3)}.\end{aligned}$$

Единственная комбинация, коммутирующая с $\widetilde{H}$ (и не зависящая от $j$), имеет вид

$$\widehat{T} = \widetilde{T}_{(j)} - \frac{1}{2(1+2\varkappa_3)}\widetilde{H}\widetilde{H} - \frac{4(j-1)\varkappa_3 + 2j - 3}{2(1+2\varkappa_3)}\partial\widetilde{H}. \qquad (5)$$

Центральный заряд этого тензора энергии-импульса равен

$$\widehat{c} = \frac{3(1-2\varkappa_1)(1-2\varkappa_2)}{1+2\varkappa_3}. \qquad (6)$$

При отождествлениях $1/\varkappa_1 = k_1 + 2$, $1/\varkappa_2 = k_2 + 2$, $1/\varkappa_3 = -k_1 - k_2 - 4$ он совпадает с центральным зарядом косет-теории $\widehat{s\ell}(2)_{k_1} \oplus \widehat{s\ell}(2)_{k_2}/\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$.

Чтобы показать, что помимо алгебры Вирасоро, порожденной оператором $\widehat{T}$, когомологии $\mathcal{Q}$ содержат коммутирующую с $\mathcal{H}_0$ $W$-алгебру, заметим, что следующее из (3), (4) разбиение $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(0)} + \mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(2)}$ соответствует фильтрации на БРСТ-комплексе, по отношению к которой $\mathcal{Q}^{(i)}$ понижает индекс на $i$, так что имеем $(\mathcal{Q}^{(0)})^2 = 0$, $\mathcal{Q}^{(0)}\mathcal{Q}^{(1)} + \mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(0)} = 0$, $(\mathcal{Q}^{(1)})^2 + \mathcal{Q}^{(0)}\mathcal{Q}^{(2)} + \mathcal{Q}^{(2)}\mathcal{Q}^{(0)} = 0$. Это позволяет использовать соответствующую спектральную последовательность. Когомологии $\mathcal{Q}^{(0)}$ в нулевом духовом числе порождаются $\eta\xi$ и еще тремя токами:

$$\widehat{h}^{(i)} = h^{(i)} + B_iC_i + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}(-1)^{\delta_{i,j}}\beta_j\gamma_j, \qquad i = 1,2,3.$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что входящие в $\mathcal{Q}^{(1)}$ слагаемые действуют на когомологиях $\mathcal{Q}^{(0)}$ как вертексные операторы:

$$\gamma_1\eta = \\ = \exp\left\{\int\left(\frac{1}{\varkappa_1}\widehat{h}^{(1)} - \frac{1}{\varkappa_2}\widehat{h}^{(2)} - \left(\frac{1}{\varkappa_3}+2\right)\widehat{h}^{(3)} + \widetilde{H}\right)\right\},$$

$$\gamma_2\eta = \\ = \exp\left\{\int\left(-\frac{1}{\varkappa_1}\widehat{h}^{(1)} + \frac{1}{\varkappa_2}\widehat{h}^{(2)} - \left(\frac{1}{\varkappa_3}+2\right)\widehat{h}^{(3)} + \widetilde{H}\right)\right\},$$

$$\gamma_3\xi = \\ = \exp\left\{\int\left(-\frac{1}{\varkappa_1}\widehat{h}^{(1)} - \frac{1}{\varkappa_2}\widehat{h}^{(2)} + \left(\frac{1}{\varkappa_3}+2\right)\widehat{h}^{(3)} - \widetilde{H}\right)\right\}.$$

Обозначая экспоненты в этих формулах через $X_a$, $a = 1,2,3$, находим операторные произведения $X_1(z)X_2(w) = (1/\varkappa_3+1)\log(z-w)$, $X_1(z)X_3(w) = (1/\varkappa_2-1)\log(z-w)$, $X_2(z)X_3(w) = (1/\varkappa_1-1)\log(z-w)$. Определяя скалярное произведение в пространстве токов как коэффициент перед логарифмом, получаем, что $\langle X_1, X_2\rangle + \langle X_1, X_3\rangle + \langle X_2, X_3\rangle = -1$. Кроме того, как легко видеть, $\langle X_a, X_a\rangle = 1\ \forall a = 1,2,3$.

Таким образом, на трехбозонном пространстве, являющемся дополнительной к $\widetilde{H}$ частью нулевого члена спектральной последовательности, три оператора $\oint\gamma_1\eta$, $\oint\gamma_2\eta$ и $\oint\gamma_3\xi$ определяют некую $W$-алгебру как свой коммутант. Эта $W$-алгебра содержит алгебру Вирасоро, порожденную оператором (5) с центральным зарядом (6). Следуя [4], можно показать, что при общих значениях параметров когомологиями $\mathcal{Q}$ является в точности эта $W$-алгебра, умноженная на $\mathcal{H}_0$ (в частности, дифференциал $\mathcal{Q}^{(2)}$ тривиален на первом члене спектральной последовательности). Тем самым, результат гамильтоновой редукции является $W$-алгеброй, задаваемой как коммутант трех фермионных скринингов.

**3. $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$, скрининги и квантовые группы.** Для изучения этого коммутанта сформулируем полученное несколько более "инвариантно". Возникли операторы, которые в терминах трех свободных полей $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ выражаются как $\sigma_i = \oint e^{\mathbf{a}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}}$, где векторы $\mathbf{a}_i$ удовлетворяют условиям $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i = 1$ и $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3 = -1$. *Такие три фермионных скрининга порождают нильпотентную подалгебру квантовой группы $\mathcal{U}_qD(2|1;\alpha)$.* По определению их коммутант есть $W$-алгебра $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$. Она зависит от двух параметров, $k_1$ и $k_2$, которые можно выбрать, полагая

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 = k_2+1, \quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3 = k_1+1, \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3 = -3-k_1-k_2.$$

Центральный заряд $W$-алгебры тогда равен центральному заряду косета в правой части (1). Наряду с $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$ мы поэтому будем использовать обозначение $\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)$.

Далее, всякая пара фермионных скринингов $\{\sigma_i,\sigma_j\}$, $i \neq j$, определяет нильпотентную подалгебру в квантовой группе $\mathcal{U}_q s\ell(2|1)$. Тем самым коммутант этих двух скринингов в соответствующем двухбозонном подпространстве является $W$-алгеброй $\mathcal{W}s\ell(2|1)$. Но эта алгебра коммутирует с третьим, бозонным, скринингом, имеющим вид произведения тока на экспоненту. Поскольку алгебра $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$ есть пересечение трех алгебр вида $\mathcal{W}s\ell(2|1)\otimes$(Гайзенберг), ее коммутант содержит три бозонных скрининга (при $1\le i<j\le 3$):

$$\rho_{ij} = \oint R_{ij}, \quad R_{ij} = J_{ij}\, e^{\mathbf{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{\varphi}}, \quad \mathbf{r}_{ij} = -\frac{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j}{(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j)+1},$$

где $J_{ij}$ есть линейная комбинация $\mathbf{a}_i\cdot\partial\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{a}_j\cdot\partial\boldsymbol{\varphi}$. Из условий на $\mathbf{a}_i$ следует, что *операторы $\rho_{12}$, $\rho_{13}$ и $\rho_{23}$ попарно коммутируют, а каждый оператор $\rho_{ij}$ коммутирует с $\sigma_1$, $\sigma_2$ и $\sigma_3$.*

Операторы $\rho_{12}$, $\rho_{13}$ и $\rho_{23}$ являются верхне-треугольными генераторами в квантовых группах $\mathcal{U}_{q_a}s\ell(2)$, $a = 1,2,3$, с соответствующими квантово-групповыми параметрами $q_a = e^{\pi i\kappa_a}$, где

$$\kappa_1 = \frac{2}{k_2+2}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{k_1+2}, \quad \kappa_3 = \frac{-2}{k_1+k_2+2}.$$

Таким образом, $W$-алгебра $\mathcal{W}D(2|1;\alpha)$ коммутирует с двумя взаимно коммутирующими квантовыми группами: $\mathcal{U}_qD(2|1;\alpha)$ и $\mathcal{U}_{q_1}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_2}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_3}s\ell(2)$. Вторая из них используется для доказательства того факта, что $\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)$ есть $W$-алгебра косет-теории.

**4. $\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)$ есть алгебра косет-теории.** Напомним, что конформную теорию, определяемую косетом [8] $\widehat{s\ell}(2)\oplus\widehat{s\ell}(2)/\widehat{s\ell}(2)$ можно определить в рамках БРСТ-подхода [9–11] как относительные полубесконечные когомологии

$$H^{\infty/2}(\widehat{s\ell}(2)_{-4}, s\ell(2); \underset{(k_1)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_2)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_3)}{\mathsf{Vac}})$$

комплекса

$$\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_2}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_3}\oplus(\text{духи}) \\ \text{при}\quad k_1+k_2+k_3 = -4,$$

где духи даются тремя системами свободных фермионов, а дифференциал строится стандартным образом для диагонально вложенной $\widehat{s\ell}(2)$-алгебры уровня $(-4)$ [5–7]. При $k_1$ и $k_2$ общего положения когомологии этого комплекса сконцентрированы в нулевом духовом числе, что и дает локальные поля (потомки вакуума) косет-теории.

Алгебра вертексных операторов косета содержит $\bigoplus_{m,n,\ell} H^{\infty/2}(\widehat{s\ell}(2), s\ell(2); \mathcal{M}_m\otimes\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{M}_\ell)$, где $\mathcal{M}_\ell$ – модули Вейля. Это позволяет охарактеризовать косет следующим свойством: для любого $i = 1,2,3$ произведение косета на $\widehat{s\ell}(2)$-алгебру уровня $-k_i-4$, "двойственного" к $k_i$, допускает вертекс-операторное расширение (в-о.р.) до произведения двух других $\widehat{s\ell}(2)_{k_i}$-алгебр, например

$$\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{-k_1-4}\xrightarrow{\text{в-о.р.}}\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_2}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_3} \tag{7}$$

(где под $\mathcal{U}$ можно понимать вакуумное представление). Это вертекс-операторное расширение строится с помощью свертки косетных вертексных операторов и $\widehat{s\ell}(2)_{-k_1-4}$-вертексных операторов "по квантово-групповому индексу", индуцированной взятием безмонодромийных элементов в каждом слагаемом:

$$\bigoplus_{n\geq 0} H^{\infty/2}(\widehat{s\ell}(2), s\ell(2); \mathcal{M}_n\otimes \underset{(k_2)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_3)}{\mathsf{Vac}})\otimes\mathcal{M}_n \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim}\underset{(k_2)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_3)}{\mathsf{Vac}}.$$

Свойство (7) ***характеризует*** $\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)$ как косет, поскольку $\widehat{s\ell}(2)_{-k_1-4}$ тогда диагонально вкладывается в $\widehat{s\ell}(2)_{k_2}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_3}$ (где $k_1+k_2+k_3=-4$), а значит, $\widehat{s\ell}(2)_{-4}$ диагонально вложена в правую часть вертекс-операторного расширения

$$\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{-k_1-4}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_2}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_3}.$$

Но тогда, в соответствии с определением, относительные полубесконечные когомологии правой части воспроизводят косет, тогда как в левой части $H^{\infty/2}(\widehat{s\ell}(2)_{-4}, s\ell(2))$ вычисляется как $\mathbb{C}$ на $\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{-k_1-4}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_1}$ и тем самым дает $\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)$.

Итак (заменяя еще $k_1$ на $k_3=-k_1-k_2-4$), построим требуемое вертекс-операторное расширение

$$\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)\otimes\mathcal{U}s\ell(2)_{k_1+k_2}\xrightarrow{\text{в-о.р.}}\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\otimes\mathcal{U}\widehat{s\ell}(2)_{k_2}. \tag{8}$$

Пусть $\mathbb{C}^n_\kappa$ обозначает $n$-мерный модуль над квантовой группой $\mathcal{U}_q s\ell(2)$, где $q=e^{\pi i\kappa}$. Операторы

$$\Psi_{212}=e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{23})\cdot\boldsymbol{\varphi}},\qquad \Psi_{122}=e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{13}+\mathbf{r}_{23})\cdot\boldsymbol{\varphi}},$$
$$\Upsilon_{113}=\mathbf{a}_1\cdot\partial\boldsymbol{\varphi}\,e^{-\mathbf{r}_{23}\cdot\boldsymbol{\varphi}}$$

являются векторами старшего веса в представлениях квантовой группы $\mathcal{U}_{q_1}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_2}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_3}s\ell(2)$, размерности которых указаны индексами (и являются синглетами по отношению к квантовой группе $\mathcal{U}_qD(2|1;\alpha)$). Мы выразим это как

$$\Psi_{212}(z)\in(\mathbb{C}^2_{\frac{2}{k_2+2}}\otimes\mathbb{C}^2_{-\frac{2}{k_1+k_2+2}})(z),$$
$$\Psi_{122}(z)\in(\mathbb{C}^2_{\frac{2}{k_1+2}}\otimes\mathbb{C}^2_{-\frac{2}{k_1+k_2+2}})(z),$$
$$\Upsilon_{113}(z)\in\mathbb{C}^3_{-\frac{2}{k_1+k_2+2}}(z).$$

Оператор $\Upsilon_{113}$, являющийся трехмерным представлением квантовой группы $\mathcal{U}_{q^{-1}}s\ell(2)$ при $q=e^{2\pi i/(k_1+k_2+2)}$, можно свернуть с вертексным оператором $\Phi_1(k_1+k_2)$ спина 1 для алгебры $\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$. Этот вертексный оператор является трехмерным представлением $\mathcal{U}_qs\ell(2)$, что мы запишем как $\Phi_1(k_1+k_2)(z)=\mathbb{C}^3(z)\otimes\mathbb{C}^3_q$ (где первый множитель $\mathbb{C}^3$ представляет триплет по отношению к горизонтальной $s\ell(2)$-подалгебре). Свертка "по квантово-групповому индексу" дается взятием квантово-группового синглета $w_3\in\mathbb{C}^3_q\otimes\mathbb{C}^3_{q^{-1}}$. Результат есть *локальное* поле:

$$\underbrace{\mathbb{C}^3(z)\otimes\mathbb{C}^3_{\frac{2}{k_1+k_2+2}}}_{\Phi_1(k_1+k_2)(z)}\otimes\underbrace{\mathbb{C}^3_{\frac{-2}{k_1+k_2+2}}(z)}_{\Upsilon_{113}(z)}\ni\mathbb{C}^3(z)\otimes w_3,$$

которое является трехмерным представлением $s\ell(2)$-подалгебры в $\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$. Выберем в этом представлении базис $J^+_*(z)$, $J^0_*(z)$, $J^-_*(z)$, где $J^+_*(z)$ соответствует старшему вектору. Пусть $J^{\pm,0}_{\rm diag}(z)$ – токи алгебры $\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$. Тогда токи

$$J^{\pm,0}_1=\frac{1}{k_1+k_2}(k_1J^{\pm,0}_{\rm diag}+J^{\pm,0}_*),$$
$$J^{\pm,0}_2=\frac{1}{k_1+k_2}(k_2J^{\pm,0}_{\rm diag}-J^{\pm,0}_*)$$

удовлетворяют соответствующей $\widehat{s\ell}(2)_{k_i}$-алгебре. (При этом пространство, порожденное токами $J^{\pm,0}_*$, отождествляется с представлением $\widehat{s\ell}(2)_{k_1+k_2}$, порожденным токами $k_2J^{\pm,0}_1(z)-k_1J^{\pm,0}_2(z)$ в $\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_2}$.) Мы получили (8). Отсюда следует гомоморфизм

$$\mathcal{W}D_{2|1}(k_1,k_2)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{\infty/2}(\widehat{s\ell}(2)_{-4}, s\ell(2); \underset{(k_1)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_2)}{\mathsf{Vac}}\otimes\underset{(k_3)}{\mathsf{Vac}}),$$

являющийся в действительности изоморфизмом.

Подобным же образом строятся *вертексные операторы* для $\widehat{s\ell}(2)_{k_1}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_2}$. Пусть $\Phi_{\frac{1}{2}}(k)(z) = \mathbb{C}^2(z)\otimes\mathbb{C}^2_{2/(k+2)}$ – вертексный оператор спина $\frac{1}{2}$ для $\widehat{s\ell}(2)_k$. Здесь $\mathbb{C}^2_{2/(k+2)}$ является двумерным представлением $\mathcal{U}_q s\ell(2)$ с квантово-групповым параметром $q = e^{2\pi i/(k+2)}$, а первый множитель $\mathbb{C}^2$ представляет $s\ell(2)$-дублет. Используя двойственность квантово-групповых представлений на $\Phi_{\frac{1}{2}}(k_1+k_2)$ и $\Psi_{212}$, имеем

$$\underbrace{\mathbb{C}^2(z)\otimes\mathbb{C}^2_{\frac{2}{k_1+k_2+2}}}_{\Phi_{1/2}(k_1+k_2)(z)}\otimes\underbrace{(\mathbb{C}^2_{\frac{2}{k_2+2}}\otimes\mathbb{C}^2_{\frac{-2}{k_1+k_2+2}})(z)}_{\Psi_{212}(z)}\ni\mathbb{C}^2(z)\otimes\mathbb{C}^2_{\frac{2}{k_2+2}}\otimes w_2,$$

где $w_2$ – безмонодромийный элемент, а $\mathbb{C}^2(z)\otimes\mathbb{C}^2_q$ оказывается вертексным оператором $\Phi_{\frac{1}{2}}(k_2)(z)$ спина $\frac{1}{2}$ для $\widehat{s\ell}(2)_{k_2}$. Для $\widehat{s\ell}(2)_{k_1}$ построение аналогично (с использованием $\Psi_{122}$).

В заключение суммируем в виде схемы основные шаги в доказательстве утверждений (1) и (2):

$$\begin{tikzcd}
\text{Гамильтонова редукция} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \text{коммутант фермионных скринингов} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \text{бозонные скрининги} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \text{операторы } \Psi_{212},\ \Psi_{122},\ \Upsilon_{113} \arrow[r] & \text{вертекс-операторное расширение и реконструкция } \widehat{s\ell}(2)_{k_1}\oplus\widehat{s\ell}(2)_{k_2} \arrow[d, Rightarrow] \\
W\text{-алгебра } \mathcal{W} & \mathcal{W}=\mathcal{W}D(2|1;\alpha) \arrow[ur] & \mathcal{U}_{q_1}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_2}s\ell(2)\otimes\mathcal{U}_{q_3}s\ell(2) \arrow[ur] & & \mathcal{W}=\text{косет}
\end{tikzcd}$$

Заметим еще, что поскольку частичная гамильтонова редукция алгебры $\widehat{D}(2|1;\alpha)$ приводит к (нелинейной) $N=4$ суперконформной алгебре [1], возникает интересный вопрос о связи этой алгебры с косетом посредством "вторичной" гамильтоновой редукции [12].

Мы благодарны А. Таормине за полезные замечания о $N=4$-алгебрах и за указание на работы о редукции $\widehat{D}(2|1;\alpha)\to(N=4)$. Авторам приятно отметить гостеприимство, оказанное им в Институте Филдса, где была частично выполнена данная работа. Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 01-01-00906) и Фондом содействия Российской науки.

1. K. Ito and J. O. Madsen, Phys. Lett. **B283**, 223 (1992); K. Ito, J. O. Madsen, and J. L. Petersen, Nucl. Phys. **B398**, 425 (1993); Phys. Lett. **B292**, 298 (1992).
2. P. Bowcock, B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, and A. Taormina, Commun. Math. Phys. **214**, 495 (2000).
3. V. G. Kač, Commun. Math. Phys. **53**, 31 (1977). J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Vol.3, Academic Press, 1989.
4. B. Feigin and E. Frenkel, Int. J. Math. Phys. A7, Supplement **1A**, 197 (1992).
5. B. L. Feigin, Usp. Mat. Nauk **39**(2), 195 (1984).
6. I. Frenkel, H. Garland, and G. J. Zuckerman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83**, 8446 (1986).
7. S. Hwang, Commun. Math. Phys. **194**, 591 (1998).
8. P. Goddard, A. Kent, and D. Olive, Phys. Lett. **B152**, 88 (1985).
9. K. Gawędzki and A. Kupiainen, Phys. Lett. **B215**, 119 (1988); Nucl. Phys. **B320**, 625 (1989).
10. D. Karabali and H. Schnitzer, Nucl. Phys. **B329**, 649 (1990).
11. S. Hwang and H. Rhedin, Nucl. Phys. **B406**, 165 (1993).
12. J. O. Madsen and E. Ragoucy, Commun. Math. Phys. **185**, 509 (1997).