Функция Гелл-Манна – Лоу квантовой электродинамики

И. М. Суслов[1)]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 июля 2001 г.

Восстановлена функция Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$ квантовой электродинамики (g – постоянная тонкой структуры). При больших g она имеет поведение $\beta_\infty g^\alpha$ с $\alpha \approx 1$, $\beta_\infty \approx 1$.

PACS: 11.10.-z

В недавних работах автора [1, 2] разработана процедура суммирования расходящихся рядов теории возмущений при произвольных значениях константы связи, в которой информация обо всех членах ряда получается путем интерполяции известных первых членов с асимптотикой Липатова [3]. В настоящей работе мы воспользуемся этой процедурой для восстановления функции Гелл-Манна – Лоу квантовой электродинамики.

Метод Липатова [3] основан на перевальном вычислении функциональных интегралов вблизи инстантонных конфигураций и подвергается сомнению в связи с возможным существованием ренормалонных вкладов [4]. С формальной точки зрения, асимптотика теории возмущений определяется особенностью в борелевской плоскости, ближайшей к началу координат. Если наличие инстантонных сингулярностей не вызывает сомнений, то существование ренормалонных сингулярностей никогда не было доказано, что признается самыми активными сторонниками этого направления [5]. Доказанное автором [6] отсутствие ренормалонных сингулярностей в теории φ^4 ставит под сомнение концепцию ренормалонов в целом, хотя аналогичные доказательства для других теорий поля отсутствуют. В такой ситуации мы считаем возможным работать в предположении отсутствия ренормалонных сингулярностей.

1. Асимптотика теории возмущений для квантовой электродинамики обсуждалась в конце 70-х годов [7 – 9]; все принципиальные вопросы были решены Богомольным и Фатеевым [8, 9], но результаты не были доведены до конкретных величин. Ниже мы частично восполним этот пробел.

Вершина с M фотонными и $2L$ электронными концами определяется функциональным интегралом

$$Z_{M,L} = \int DAD\bar\psi D\psi\, A(x_1)\ldots A(x_M) \times$$
$$\times\, \psi(y_1)\bar\psi(z_1)\ldots\psi(y_L)\bar\psi(z_L) \times$$
$$\times \exp\Big\{-\int d^4x\Big[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 +$$
$$+\,\bar\psi(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu)\psi\Big]\Big\}. \qquad (1)$$

Интегрирование по фермионным полям дает

$$Z_{M,L} = \int DA\, A(x_1)\ldots A(x_M)\, G(y_1,z_1)\ldots G(y_L,z_L)\times$$
$$\times \det(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu)\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\int d^4x(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\right\} + \ldots, \qquad (2)$$

где $G(x,x')$ – функция Грина оператора Дирака

$$(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu)\, G(x,x') = \delta(x-x'), \qquad (3)$$

а многоточием показаны члены с другими спариваниями $\psi(y_i)$ и $\bar\psi(z_k)$. Оценки показывают, что для перевальной конфигурации величина $eA_\nu(x)$ велика и можно воспользоваться асимптотикой детерминанта при $e \to i\infty$, так как максимальная скорость роста достигается при чисто мнимых e [9]:

$$\ln\det(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu) = \frac{e^4}{12\pi^2}\int d^4x\,\left(A_\nu^2\right)^2. \quad (4)$$

Этот результат не является калибровочно-инвариантным и справедлив лишь при специальном выборе калибровки; он может быть получен для медленно меняющихся полей или для конфигураций, обладающих достаточно высокой симметрией [9]. С учетом (4), в (2) возникает функциональный интеграл с эффективным действием

$$S_{\text{eff}}\{A\} = \int d^4x\left\{\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{4}{3}g^2\left(A_\nu^2\right)^2\right\},$$
$$g = \frac{e^2}{4\pi}, \qquad (5)$$

для которого асимптотика теории возмущений может быть найдена методом Липатова. Структура

[1)]e-mail: suslov@kapitza.ras.ru

асимптотики определяется свойствами однородности для действия [10]; при использовании g^2 в качестве константы связи эти свойства – такие же, как в теории φ^4, и общий член асимптотики имеет вид $cS_0^{-N}\Gamma(N+b)g^{2N}$, где S_0 — инстантонное действие. Фактически разложение происходит по произвольным целым (а не только четным)[2)] степеням g и общий член имеет вид $cS_0^{-N/2}\Gamma(N/2+b)g^N$. С учетом значения инстантонного действия, для вклада N-го порядка в вакуумный интеграл ($M=0,\ L=0$) имеем [8]

$$Z_N(-g)^N = \text{const}\,\left(\frac{3^{3/2}}{4\pi^3}\right)^{N/2}\Gamma\left(\frac{N+r}{2}\right)(-g)^N, \quad (6)$$

где $r=11$ – число нулевых мод, в которое входят 4 трансляции, масштабное преобразование и 6 четырехмерных вращений (инстантон по симметрии соответствует твердому телу неправильной формы).

В общем случае функциональная форма результата может быть найдена путем описанных в [10] структурных вычислений, сводящихся к размерному анализу. Легко показать, что для перевальной конфигурации $e_c \sim N^{-1/4}$, $A_c(x) \sim N^{1/2}$; для установления размерности $G(x,x')$ выпишем вытекающее из (3) уравнение Дайсона

$$G(x,x') = G_0(x-x') - \int d^4y G_0(x-y)e\gamma_\nu A_\nu(y)G(y,x')\,. \quad (7)$$

Чтобы выяснить структуру решения, рассмотрим скалярный аналог (7) и предположим, что функция $A_\nu(x)$ сильно локализована вблизи $x=0$; тогда в интеграле можно положить $G(y,x') \approx G(0,x')$, после чего уравнение легко решается:

$$G(x,x') = G_0(x-x') - \\ - \frac{G_0(-x')\int d^4y G_0(x-y)e\gamma_\nu A_\nu(y)}{1+\int d^4y G_0(-y)e\gamma_\nu A_\nu(y)}\,. \quad (8)$$

Ввиду $eA_\nu(x) \sim N^{1/4}$ и конечности предела (8) при $e\to\infty$ имеем $G(x,x') \sim N^0$; естественно ожидать, что этот результат имеет общий характер и не связан со сделанными предположениями. Вклад N-го порядка для интеграла (1) имеет вид

$$\text{const}\left(\frac{3^{3/2}}{4\pi^3}\right)^{N/2}\Gamma\left(\frac{N+r+M}{2}\right)(-g)^N \quad (9)$$

для четных M и с лишним множителем $eN^{1/4}$ – для нечетных M.

Далекие коэффициенты разложения функции Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)=\sum_N \beta_N(-g)^N$ с точностью до постоянного множителя совпадают с коэффициентами для инвариантного заряда [3], который в электродинамике определяется величиной gD, где D — фотонный пропагатор ($M=2$, $L=0$). Общий член асимптотики $D_N(-g)^{N+1} \sim NZ_N(-g)^{N+1}$ или $NZ_{N-1}(-g)^N \sim N^{1/2}Z_N(-g)^N$, откуда

$$\beta_N = \text{const}\cdot 4.886^{-N}\Gamma\left(\frac{N+12}{2}\right), \quad N\to\infty. \quad (10)$$

Тот же результат получается при определении инвариантного заряда по тройной вершине ($M=1$, $L=1$); при этом главный вклад в асимптотику возникает от ампутации фотонной линии.

2. Известны четыре члена разложения β-функции в MOM-схеме [11]:

$$\beta(g) = \frac{4}{3}g^2 + 4g^3 + \left[\frac{64}{3}\zeta(3) - \frac{202}{9}\right]g^4 + \\ + \left[186 + \frac{256}{3}\zeta(3) - \frac{1280}{3}\zeta(5)\right]g^5 + \ldots \quad (11)$$

Процедура суммирования ряда требует некоторой модификации по сравнению с [1, 2] в связи с тем, что асимптотика Липатова имеет вид $ca^N\Gamma(N/2+b)$ вместо $ca^N\Gamma(N+b)$. Борелевский образ $B(z)$ определяется формулами

$$\beta(g) = \int_0^\infty dx e^{-x}x^{b_0-1}B(ag\sqrt{x}),$$

$$B(z) = \sum_{N=0}^\infty B_N(-z)^N,\ B_N = \frac{\beta_N}{a^N\Gamma(N/2+b_0)}, \quad (12)$$

где b_0 – произвольный параметр. Конформное преобразование $z=u/(1-u)$ дает для борелевского образа сходящийся ряд по u с коэффициентами

$$U_N = \sum_{K=1}^N B_K(-1)^K C_{N-1}^{K-1}\ (N\ge 1),\ U_0 = B_0, \quad (13)$$

поведение которых при больших N

$$U_N = U_\infty N^{\alpha-1}\,, \qquad U_\infty = \frac{\beta_\infty}{a^\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(b_0+\alpha/2)} \quad (14)$$

определяет параметры асимптотики $\beta(g)=\beta_\infty g^\alpha$ при $g\to\infty$.

[2)] Прямое разложение (2) по последнему члену в (5) некорректно, так как функциональное интегрирование будет затрагивать конфигурации, для которых результат (5) несправедлив. Вычисление должно проводиться методом перевала, который дает непрерывную функцию от N; тот факт, что она должна браться в целых или полуцелых точках, является внешним условием.

Интерполяция производится для приведенной коэффициентной функции

$$F_N = \frac{\beta_N}{\beta_N^{as}} = A_0 + \frac{A_1}{N-\tilde{N}} + \frac{A_2}{(N-\tilde{N})^2} + \ldots,$$

$$\beta_N^{as} = a^N N^{\tilde{b}} \Gamma(N/2 + b - \tilde{b}), \qquad (15)$$

путем обрыва ряда и выбора коэффициентов A_K из соответствия с известными значениями F_N. Принимается оптимальная параметризация асимптотики с $\tilde{b} = b - 1/2 = 5.5$ [2], а параметр $\tilde{N}$ используется для контроля устойчивости результатов и численной оптимизации. В отличие от теории φ^4 [1, 2], нам неизвестен общий коэффициент при асимптотике (10). В техническом плане это не представляет проблемы – параметр A_0 в (15) не считается известным, а находится в результате интерполяции. Однако это приводит к значительно большей неопределенности для функции F_N: ее первые значения $F_2 = 63.1$, $F_3 = -7.02$, $F_4 = 0.34$, $F_5 = 1.23$ (в единицах 10^{-3}) обнаруживают лишь слабую тенденцию к выходу на константу и прогнозируемое значение $A_0 = \lim_{N\to\infty} F_N$ меняется на несколько порядков в зависимости от $\tilde{N}$. На первый взгляд, получение разумных результатов в такой ситуации невозможно.

Однако используемый алгоритм определения асимптотики $\beta(g)$ обладает своеобразной "суперустойчивостью". Добавление к B_N произвольного полинома m-й степени, $P_m(N)$, вообще не меняет коэффициентов U_N при $N \geq m+2$ [2]. Это свойство обобщается на широкий класс гладких функций: замена $B_N \to B_N + f(N)$, где $f(N)$ — целая функция с быстро убывающими коэффициентами ряда Тейлора, дает изменение U_N, быстро убывающее с ростом N. Таким образом, гладкие ошибки оказываются несущественными даже при большой их величине. Напротив, негладкие ошибки приводят к катастрофическому эффекту, что можно использовать для оптимизации интерполяционной процедуры: при неудачном способе интерполяции поведение U_N при больших N вообще не может быть интерпретировано в рамках степенного закона [2].

Для проверки этих соображений мы провели тестовый эксперимент для теории φ^4. При использовании полной информации (то есть коэффициентов β_2, β_3, β_4, β_5 и параметров A_0 и A_1 в (15)) мы получили $\alpha = 0.96 \pm 0.01$, $\beta_\infty = 7.4 \pm 0.4$ [2]; та же процедура без использования A_0 и A_1 дает $\alpha = 1.02 \pm 0.03$, $\beta_\infty = 1.7 \pm 0.3$. Если учесть, что неопределенность коэффициентной функции (оцениваемая путем изменения $\tilde{N}$ на величину ~ 1 вблизи оптимального значения) в первом случае составляет несколько процентов, а во втором – более чем порядок величины,

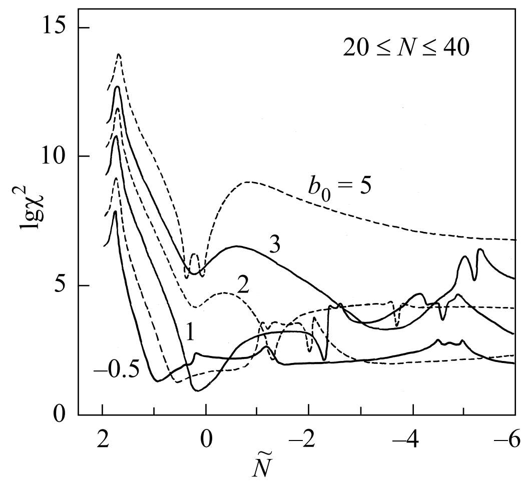

Рис.1

то такая стабильность результатов является вполне удовлетворительной[3]. Конечно, получаемые ниже результаты должны рассматриваться лишь как нулевое приближение.

Следуя [2], проведем обработку U_N по степенному закону для фиксированного интервала $20 \leq N \leq 40$ и различных b_0 и $\tilde{N}$. Зависимости χ^2 от $\tilde{N}$ (рис.1) позволяют выделить множество интерполяций ($-0.5 \lesssim \tilde{N} \lesssim 1.0$), для которых степенное поведение U_N является вероятным. Типичные зависимости χ^2 и эффективных значений U_∞ и α от b_0 (рис.2)[4] указывают, что $\alpha \approx 1$. Действительно, смена знака U_∞ (см. (14)) происходит при $b_0 = -\alpha/2 \approx -0.5$. При том же значении b_0 возникает минимум χ^2, соответствующий тому, что главный вклад $U_\infty N^{\alpha-1}$ исчезает и реализуется степенной закон $U_N \sim N^{\alpha'-1}$, где α' – индекс, соответствующий первой поправке к асимптотике $\beta(g)$ (предполагаем, что $\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha + \beta'_\infty g^{\alpha'} + \beta''_\infty g^{\alpha''} + \ldots$ при больших g). Значения α_{eff} в минимумах χ^2 при $b_0 = -\alpha'/2$, $-\alpha''/2 \ldots$, когда происходит исчезновение соответствующих поправок к (14), наиболее близки к точному значению $\alpha \approx 1$ [2] [5].

На рис.3а представлены различные оценки индекса α [2] в зависимости от $\tilde{N}$: *1* – по значению α_{eff}

[3] Полученный сдвиг β_∞ не контролируется оценкой точности, но это вполне объяснимо: отработанная в [2] процедура оценки ошибок обоснована лишь при достаточной близости к точному результату, когда все отклонения могут быть линеаризованы.

[4] По техническим причинам приводится $\tilde{U}_\infty = U_\infty \Gamma(b_0 + 1)$.

[5] Обычно в тестовых примерах наблюдаются только минимумы χ^2, соответствующие α и α' [2]. Появление дополнительных минимумов, по-видимому, характерно для малого количества информации, оно наблюдалось и в упомянутом тестовом эксперименте для теории φ^4.

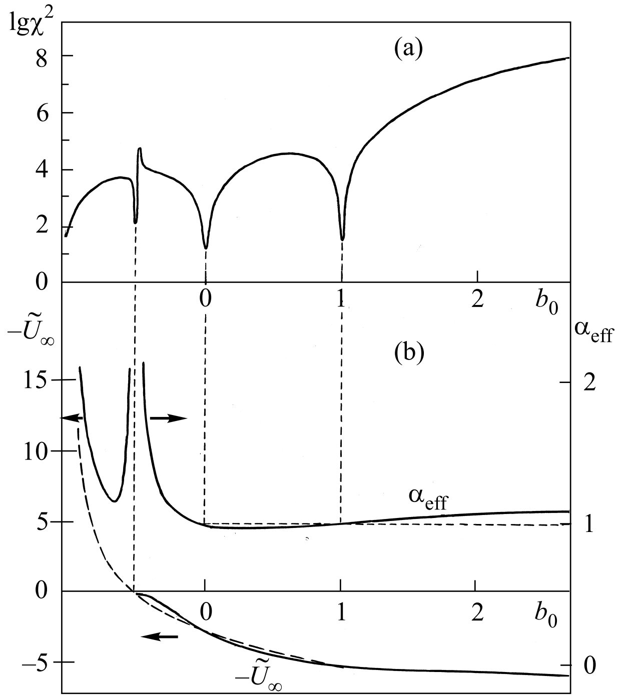

Рис.2

в минимумах χ^2, соответствующих α' и α''; *2* – по положению минимума χ^2, соответствующего $b_0 = -\alpha/2$; *3* – по смене знака U_∞ при обработке путем логарифмирования U_N (сплошная кривая на рис.2b); *4* – то же, при обработке с фиксированным индексом (штриховая кривая на рис.2b). На рис.3b приведены различные оценки β_∞: *1* – по значению U_∞ в минимумах χ^2, соответствующих α' и α''; *2, 3* – по наклону линейного участка зависимости $U_\infty(b_0)$ вблизи корня (верхняя и нижняя оценки). Расхождение между различными оценками дает меру неопределенности результатов. При $\tilde{N} \leq 0.25$ результаты для α совместимы со значением, чуть меньшим единицы. При $\tilde{N} > 0.25$ имеется систематический рост до 1.08, не контролируемый ошибкой, но при этом минимумы χ^2 плохо выражены и нестабильны. Аналогичная картина наблюдается для β_∞. Мы принимаем, как более надежные, значения в середине исследованного интервала $\tilde{N}$ и даем консервативную оценку точности, включающую в себя систематические изменения:

$$\alpha = 1.0 \pm 0.1, \quad \beta_\infty = 1.0 \pm 0.3\,. \qquad (16)$$

В силу сказанного выше, даже такая оценка ошибки не является надежной.

Нетрудно провести суммирование ряда для произвольных g, вычисляя коэффициенты U_N по формуле (13) при $N \lesssim 30$ и продолжая их далее согласно найденной асимптотике $U_\infty N^{\alpha-1}$. На рис.4 представлены результаты суммирования для $\tilde{N} = 0.2$, $b_0 = 0$. Сшивка однопетлевого закона $\beta_2 g^2$ с асимптотикой $\beta_\infty g^\alpha$ происходит при $g \sim 10$; при $g < 5$ отличие $\beta(g)$ от однопетлевого результата несущественно. В пределах точности найденная асимптотика $\beta(g)$ совпадает с верхней границей неравенства $0 \leq \beta(g) < g$, выведенного в [12] из спектральных представлений. Если принять $\alpha = 1$, $\beta_\infty = 1$, то рост постоянной

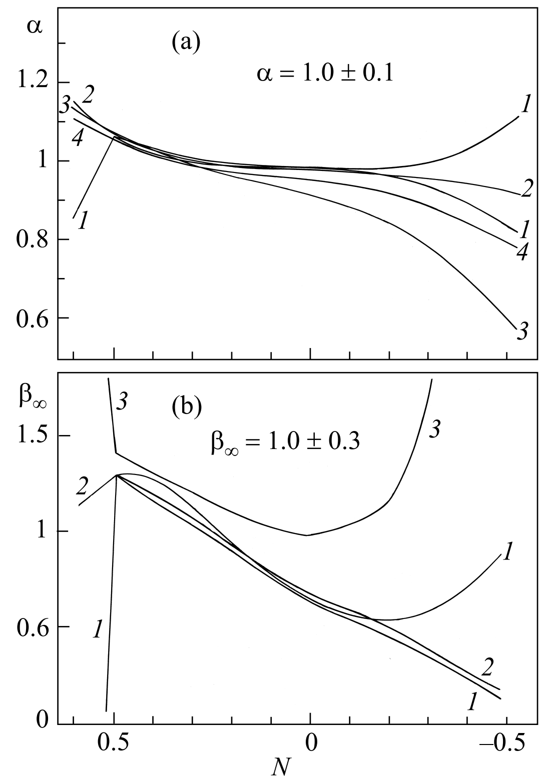

Рис.3

тонкой структуры в чистой электродинамике происходит на малых расстояниях L по закону L^{-2}.

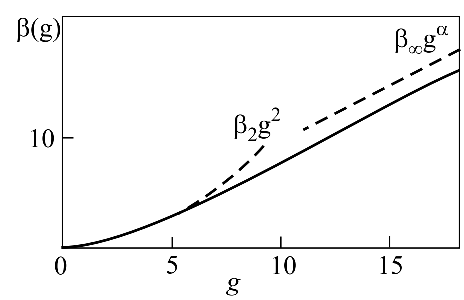

Рис.4

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант #99-1070) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант #00-02-17129).

1. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000).
2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
3. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
4. G. t'Hooft, in: *The whys of subnuclear physics*, Erice, 1977, Ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1979.
5. M. Beneke, Phys. Rept. **317**, 1 (1999), Sec. 2.4.
6. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
7. C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. **D16**, 996 (1977); R. Balian, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. **D17**, 1041 (1978).
8. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. **B76**, 210 (1978).
9. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. N. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A – Physics Reviews, Ed. I. M. Khalatnikov, **2**, 1980, Harwood Academic Press, NY, p. 247.
10. И. М. Суслов, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
11. S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, and L. R. Surguladze, Phys. Lett. **B256**, 81 (1991).
12. N. V. Krasnikov, Nucl. Phys. **B192**, 497 (1981); H. Yamagishi, Phys. Rev. **D25**, 464 (1982).