

## Проводимость вигнеровской жидкости

Э. Г. Батыев<sup>1)</sup>

Институт физики полупроводников Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 23 июля 2001 г.

Проводимость двумерных электронных систем с низкой концентрацией носителей рассматривается на основе предложенной ранее модели (ферми-жидкость с мягкой модой) и в предположении, что равновесие внутри каждой из подсистем – фермионной и бозонной – устанавливается быстро по сравнению с релаксацией на примесях и между подсистемами (гидродинамическое приближение). В такой системе имеются три времени, от которых зависит проводимость:  $\tau_1$  ( $\tau_2$ ) определяется рассеянием фермионов (бозонов) на примесях, а  $\tau_{12}$  определяется трением между подсистемами; найдены их температурные зависимости. Проводимость обычным образом связана со временем релаксации  $\tau$ , для которого получено соотношение:  $\tau^{-1} = \tau_1^{-1} + (\tau_2 + \tau_{12})^{-1}$ . Из результатов работы следует, что для достаточно чистых образцов сопротивление должно возрастать с температурой и выходить на насыщение.

PACS: 71.27.+a, 71.30.+h

В последние годы появились экспериментальные и теоретические работы, посвященные двумерным электронным системам малой плотности, в которых наблюдается переход металл – диэлектрик при понижении концентрации носителей заряда и приводятся различные объяснения этого явления и зависимостей проводимости от температуры, концентрации и магнитного поля (см. обзор [1]). Во многих работах подчеркивается роль кулоновского взаимодействия носителей – это взаимодействие по оценкам становится больше фермиевской энергии, и это обстоятельство так или иначе используется (приведем только ссылку на работу [2], которая не вошла в упомянутый обзор).

В такой системе заведомо велики корреляционные эффекты, и можно утверждать, что в этой системе имеется ближний порядок в расположении носителей, как в вигнеровском кристалле, поэтому такую систему можно называть вигнеровской жидкостью. Естественно ожидать, что это обстоятельство должно сказаться на спектре элементарных возбуждений, и вопрос в том, каким образом. В работе [3] выдвигается идея, что в такой системе может появиться новая ветвь элементарных возбуждений, соответствующая так называемой “мягкой моде”, так что помимо обычных для ферми-жидкости возбуждений фермиевского типа (фермионов) имеются еще возбуждения бозевского типа с малой энергией и конечными импульсами. Число этих новых возбуждений (бозонов) зависит от температуры, а с этим и их вклад в со-

противление, что в простейшей постановке было показано в работе [3].

Для более полного исследования вопроса о влиянии бозонов на кинетические и другие свойства системы необходимо понять, как описывать систему в произвольной, а не только в простейшей [3] постановке. Соответствующая феноменологическая модель была сформулирована в работе [4], где были получены также температурные зависимости спектров квазичастиц в равновесии. Эти результаты используются в настоящей работе с целью получения температурной зависимости сопротивления для металлического состояния.

**Уравнения движения.** Особенность задачи не только в том, что имеются две подсистемы, свойства которых зависят от температуры, но и в том, что при движении системы изменяются энергии квазичастиц, чего нет в идеальном газе. Это происходит в любой системе, в которой взаимодействие играет существенную роль. Так, в теории ферми-жидкости Ландау энергия ферми-возбуждения при движении системы преобразуется следующим образом:

$$\xi_{\mathbf{p}} \rightarrow \tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \xi_{\mathbf{p}} + (\mathbf{p}\mathbf{u}) \left(1 - \frac{m}{m^*}\right), \quad (1)$$

где  $\xi_{\mathbf{p}}$  – энергия фермиона для покоящейся системы,  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости,  $m$  – масса исходных ферми-частиц,  $m^*$  – эффективная масса фермиона, отличающаяся от  $m$  за счет взаимодействия частиц друг с другом. Речь идет об энергии в неподвижной (лабораторной) системе координат.

В рассматриваемой модели с мягкой модой приведенное соотношение изменяется, потому что есть еще воздействие бозонов, для которых тоже необхо-

<sup>1)</sup>e-mail: batyev@isp.nsc.ru

димо учесть подобный эффект. Этот вопрос решается при помощи соответствующих частей, учитывающих влияние движения различных подсистем, что задается суммой операторов  $H_3$  и  $H_4$ , определенных в [4], а именно:

$$\begin{aligned} H_3 + H_4 \rightarrow & \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \delta n(\mathbf{p}) \frac{(\mathbf{p}\mathbf{q})}{\rho} \beta_{\mathbf{q}}^+ \beta_{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}', \mathbf{q}} \langle \beta_{\mathbf{q}'}^+ \beta_{\mathbf{q}'} \rangle \frac{(\mathbf{q}'\mathbf{q})}{\rho} \beta_{\mathbf{q}}^+ \beta_{\mathbf{q}}, \quad (2) \\ \rho = m n, \quad n = & \kappa p_F^2 / 4\pi \end{aligned}$$

(опущено несущественное постоянное слагаемое). Поясним обозначения:  $\delta n(\mathbf{p})$  – отличие функции распределения фермионов от равновесной функции,  $\beta_{\mathbf{q}}^+$  ( $\beta_{\mathbf{q}}$ ) – оператор рождения (уничтожения) бозона, символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по состоянию системы,  $n$  – концентрация носителей,  $p_F$  – фермиевский импульс,  $V$  – объем (площадь) системы. Здесь наряду с суммированием по импульсам подразумевается также суммирование по фермионному спину и по номеру долины (в многодолинном случае), а множитель  $\kappa$  в определении  $n$  соответствует кратности вырождения уровня ( $\kappa = 4$  для поверхности (100) Si MOSFET – две проекции спина и две долины [1]). Считаем, что фермионная функция распределения не зависит от спина (нет магнитного поля) и номера долины. Выражения (2) – это сверх того, что имеется в обычной ферми-жидкости и что приводит к соотношению (1).

При помощи (2) с учетом также ферми-жидкостной поправки типа (1) получим вместо равновесных энергий фермиона  $\xi_{\mathbf{p}}$  и бозона  $\omega_{\mathbf{q}}$  следующие значения:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \xi_{\mathbf{p}} - (\mathbf{p}\mathbf{u}_1) + (\mathbf{p}\mathbf{u}), \quad \tilde{\omega}_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}} + (\mathbf{q}\mathbf{u}); \quad (3) \\ \rho_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \rho \mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad \rho_1 = \frac{m^*}{m} \rho. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{P}$  – плотность полного импульса (то есть в расчете на единицу площади),  $\mathbf{P}_1$  – плотность импульса фермионной подсистемы. Эти результаты не зависят от конкретного вида добавок к функциям распределения, а только от указанных характеристик.

Далее будем упрощать задачу. Один из возможных путей – это считать известными функции распределения фермионов  $n_{\mathbf{p}}$  и бозонов  $N_{\mathbf{q}}$ . Зададим их в таком виде:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}} = \left[ \exp\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{u}_1}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \\ N_{\mathbf{q}} = \left[ \exp\left(\frac{\omega_{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\mathbf{u}_2}{T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (4) \end{aligned}$$

где энергия фермиона  $\xi_{\mathbf{p}}$  отсчитана от фермиевской энергии (изменение химического потенциала, квадратичное по скорости  $\mathbf{u}_1$ , для наших целей несущественно). Выражения (4) справедливы в гидродинамическом приближении, когда равновесие внутри каждой из подсистем – фермионной и бозонной – устанавливается быстро по сравнению с релаксацией на примесях и между подсистемами. Однако получающиеся при этом результаты для проводимости оказываются правильными в пределах достаточно низких и достаточно высоких температур независимо от того, годится указанное приближение или нет.

Связь плотности импульса магной подсистемы  $\mathbf{P}_2$  со скоростью  $\mathbf{u}_2$  запишем следующим образом:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P} - \mathbf{P}_1 = \rho_2 \mathbf{u}_2, \quad (5)$$

где величину  $\rho_2$  можно было бы назвать бозонной нормальной компонентой, если бы система была сверхтекучей.

Теперь необходимо написать уравнения движения. Одно из них в общем виде выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)_i + n e \mathbf{E}, \quad (6)$$

где  $e$  – заряд,  $\mathbf{E}$  – электрическое поле. Первое слагаемое справа – это изменение импульса за счет столкновений квазичастиц с примесями. Рассмотрим сначала такой вклад для фермионов. Если бы для них функция распределения была равновесной с энергией  $\xi_{\mathbf{p}}$ , определенной в (3), то этот вклад обратился бы в нуль. На самом деле их функция распределения другая (4), поэтому искомая величина пропорциональна разности импульсов, соответствующих этим двум распределениям. Получающийся при этом результат удобно записать в виде

$$\left( \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial t} \right)_i = -\frac{1}{\tau_1} \rho \mathbf{u}. \quad (7)$$

Аналогичные рассуждения применительно к бозонам дают

$$\left( \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} \right)_i = -\frac{1}{\tau_2} \rho (\mathbf{u} + \mathbf{u}_2). \quad (8)$$

При получении данных соотношений главное было – выделить зависимости от скоростей, а остальное записать так, чтобы возможные температурные зависимости содержались только во временах релаксации  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , которые и войдут в выражение для проводимости.

После этого уравнение (6) определено, и остается написать еще уравнение для бозонного импульса. Главное, что при этом необходимо учесть, это то, что бозоны подвержены только воздействию сил трения (из-за взаимодействия с примесями и фермионами), но не электрического поля. Поэтому соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} \right)_i + \left( \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} \right)_1, \quad (9)$$

где второе слагаемое справа как раз соответствует трению о фермионы. Для установления вида этого вклада заметим, что при  $\mathbf{u}_2 = 0$  он обращается в нуль, как должно быть из общих соображений, и это следует из закона сохранения энергии при столкновениях фермионов и бозонов с энергиями (3). Поэтому этот вклад пропорционален  $\mathbf{u}_2$ , и, подобно (7), (8), его можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} \right)_1 = -\frac{1}{\tau_{12}} \rho \mathbf{u}_2. \quad (10)$$

Собирая вместе (6) – (10) и переходя от импульсов к скоростям по (3) и (5), получим следующие уравнения в однородном случае:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \mathbf{u} + \frac{1}{\tau_2} \mathbf{u}_2 = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{12}} \right) \mathbf{u}_2 + \frac{1}{\tau_2} \mathbf{u} = 0.$$

Отсюда нетрудно получить выражения для плотности тока ( $\mathbf{j} = ne\mathbf{u}$ ) и соответственно для проводимости  $\sigma$ , так что в стационарном случае имеем

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2 + \tau_{12}}. \quad (12)$$

Обратим внимание на то, что в ответ входит необычная комбинация двух времен ( $\tau_2 + \tau_{12}$ ), но так и должно быть: если одно из них стремится к бесконечности, то бозонные характеристики вообще не должны влиять на проводимость, и то, что это получается, свидетельствует о правильности результата. Если же одно из этих времен стремится к нулю, то также получается ожидаемый результат.

Из уравнений (11) видно, что выражение для проводимости  $\sigma(\nu)$  в переменном поле с частотой  $\nu$  можно получить, если в (12) произвести замены:

$$\sigma \rightarrow \sigma(\nu), \quad \frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_1} - i\nu, \quad \frac{1}{\tau_{12}} \rightarrow \frac{1}{\tau_{12}} - i\nu \frac{\rho_2}{\rho}.$$

**Температурные зависимости.** Начнем с бозонного времени релаксации  $\tau_2$ . Эта величина рассматривалась в работе [3], где было получено соответствующее выражение  $\tau_m$  для исходного бозонного спектра  $\Omega_{\mathbf{q}}$ . В нашем случае это выражение тоже годится, только надо учесть перенормировку спектра [4], что означает просто замену  $\Omega_{\mathbf{q}} \rightarrow \omega_{\mathbf{q}}$ , так что для  $\tau_2$  имеем:

$$\frac{1}{\tau_2} \approx \frac{1}{\tau_2(0)} \left[ \exp(\omega_0/T) - 1 \right]^{-1}, \quad \frac{1}{\tau_2(0)} \equiv \frac{n_i}{n} \frac{q_0^2}{\pi m}. \quad (13)$$

Здесь  $n_i$  – концентрация примесей,  $\omega_0$  и  $q_0$  – параметры перенормированного бозонного спектра:

$$\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{\omega_0^2 + v_0^2(q - q_0)^2}.$$

Из того, как выражение для  $\tau_2$  было получено [3], следует, что оно годится в случае, когда взаимодействие с примесями достаточно сильное (а самих примесей мало – для высокой подвижности); по-видимому, это имеет место для двумерных электронов в структурах металл – диэлектрик – полупроводник (например, Si MOSFET [1]). Общий случай здесь не будет обсуждаться.

Теперь о фермионном времени релаксации  $\tau_1$ . Пусть известно это время при нулевой температуре  $\tau_1(0)$ . Тогда температурная зависимость  $\tau_1$  появляется из-за эффективной массы  $m^*$ , которая отличается от эффективной массы при нулевой температуре  $m_0^*$  [4] и в релаксацию импульса фермионной подсистемы входит в квадрате. Поэтому имеем

$$\frac{1}{\tau_1} = \left( \frac{m^*}{m_0^*} \right)^2 \frac{1}{\tau_1(0)}. \quad (14)$$

Поясним, откуда следует именно квадрат эффективной массы. Соотношение (7) для известной функции распределения фермионов (4) можно получить, записав релаксацию импульса за счет рассеяния на примесях по “золотому правилу” Ферми (как, например, это было сделано в [3] для бозонов). Соответствующее выражение содержит двойную сумму по фермионным импульсам (начальному и конечному), и после перехода к интегрированию по энергиям как раз и получается квадрат эффективной массы.

О вычислении  $\tau_{12}$ . Изменение бозонного импульса из-за взаимодействия с фермионами (10) можно вычислить при помощи золотого правила Ферми, так что исходное выражение имеет вид

$$\left( \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t} \right)_1 = \frac{2\pi\kappa}{V} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{p}'+\mathbf{q}'} |M|^2 (\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \times \\ \times n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}'}) N_{\mathbf{q}}(1 + N_{\mathbf{q}'}) \delta(\tilde{\xi}_{\mathbf{p}} + \tilde{\omega}_{\mathbf{q}} - \tilde{\xi}_{\mathbf{p}'} - \tilde{\omega}_{\mathbf{q}'}), \quad (15)$$

где множитель  $\kappa$  учитывает спиновое и долинное вырождения (см. (2)). Из-за того, что бозонный импульс больше  $2p_F$ , возможны только процессы рассеяния, но не излучения или поглощения бозонов. Матричный элемент  $M$  имеет вид

$$M = \frac{1}{V} \frac{W}{\sqrt{\omega_{\mathbf{q}}\omega_{\mathbf{q}'}}}$$

Здесь выделена зависимость от бозонных энергий, а угловые зависимости, которые могут содержаться в  $W$ , для дальнейшего несущественны.

Анализ выражения (15) дает для  $\tau_{12}$  следующий результат:

$$\frac{1}{\tau_{12}} = \frac{1}{\tau_{12}(0)} \left( \frac{m^*}{m_0^*} \right)^2 J(x_0); \quad (16)$$

$$J(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - x_0^2}} \times$$

$$\times \frac{x - y}{\sinh[(x - y)/2] \sinh(x/2) \sinh(y/2)}, \quad x_0 \equiv \omega_0/T.$$

Здесь выделена температурная зависимость, а феноменологический параметр  $\tau_{12}(0)$  – это некоторая характеристика вещества, не зависящая от температуры.

Для полного ответа на вопрос о температурных зависимостях времен релаксации необходимо еще добавить к (13), (14), (16) выражения для спектров [4], именно:

$$\Delta^2 = \left( \frac{m^*}{m_0^*} \right)^2 \alpha T^2 + \omega_1^2 F(x_0),$$

$$\frac{m_0^*}{m^*} = 1 + \gamma F(x_0); \quad (17)$$

$$F(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} \frac{1}{\exp(x) - 1} - \ln(x_0 T / \Omega_0),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\Omega_0^2 + \Delta^2}$$

( $\Omega_0$  – щель в бозонном спектре при абсолютном нуле). Безразмерные постоянные  $\alpha$  и  $\gamma$  связаны соотношением  $\alpha \approx \gamma^2 / \kappa^2$  (по оценке, как в [4], но с учетом многодолинности), по-видимому,  $\gamma \sim 1$ ;  $\omega_1$  есть некоторая постоянная размерности энергии (определяется взаимодействием бозонов).

В пределе высоких температур  $T \gg \omega_0$  из (17) следует:

$$\frac{m^*}{m_0^*} \approx \frac{\omega_0}{\gamma \pi T}, \quad \omega_0 \approx \left( \pi \omega_1^2 T \right)^{1/3}.$$

Считаем, что как температура, так и величина  $\omega_1$  малы по сравнению с температурой вырождения. Предполагаемую малость  $\omega_1$  можно пояснить только одним: если это не так, то взаимодействие бозонов друг с другом аномально велико, для чего нет оснований.

Если величина  $\omega_1$  пропорциональна  $\Omega_0$ , то температурное поведение равновесных величин ( $\omega_0/\Omega_0$ ,  $m^*/m_0^*$ ) определяется отношением  $T/\Omega_0$  и описывается универсальной функцией, и это представляется естественным. Но для сопротивления подобное вряд ли имеет место, так как оно зависит и от других параметров.

Выясним, что можно сказать в общем о сопротивлении. Время  $\tau_{12}(0)$  в (16) есть характеристика вещества, не зависящая от примесей, а  $\tau_1(0)$  и  $\tau_2(0)$  зависят от взаимодействия с примесями. Для достаточно чистого образца должно выполняться неравенство

$$\tau_{12}(0) < \tau_1(0), \tau_2(0). \quad (18)$$

В экспериментах обычно приводятся зависимости для удельного сопротивления  $\varrho = 1/\sigma$ . Рассмотрим предельные значения:  $\varrho_0$  при  $T = 0$  и  $\varrho_{\infty}$  при  $T \gg \omega_0$ . В первом случае остается только  $\tau_1 = \tau_1(0)$ , а во втором – только  $\tau_{12}$ , так как при возрастании температуры  $\tau_1$  растет, а  $\tau_2$  убывает, в то время как  $\tau_{12}$  стремится к постоянному значению, которое устанавливается после приближенного вычисления соответствующих интегралов в (16) и (17). Приведем результаты для сопротивления в указанных предельных случаях:

$$\varrho_0 = \frac{m}{ne^2} \frac{1}{\tau_1(0)}, \quad \varrho_{\infty} = \frac{m}{ne^2} \frac{2}{\gamma^2} \frac{1}{\tau_{12}(0)}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что, согласно (18), возможно неравенство  $\varrho_{\infty} > \varrho_0$ , как и показывает эксперимент, и это неравенство должно усиливаться с ростом подвижности, потому что предельное значение  $\varrho_{\infty}$  не зависит от чистоты образца (оно определяется рассеянием фермионов на полностью заторможенных бозонах), а  $\varrho_0$  определяется рассеянием фермионов на примесях и уменьшается для более чистых образцов.

Для дальнейших выводов необходимы расчеты с конкретными значениями феноменологических параметров, которые появляются в задаче. Это выходит за рамки данной работы. Укажем только, что возможен как монотонный, так и немонотонный ход сопротивления между предельными значениями (19).

В заключение заметим следующее. Температурные зависимости были получены в гидродинамическом приближении. Можно показать, используя общее выражение для добавок к функциям распределения

вместо тех, которые следуют из (4), что результаты для проводимости справедливы и в общем случае в пределе высоких температур (в пределе низких температур, когда вкладом бозонов можно пренебречь, это очевидно). Этот вопрос, так же как сопоставление с экспериментом, предполагается обсудить в более подробном сообщении.

Благодарю А. В. Чаплика и М. В. Энтина за полезное обсуждение. Работа поддержана, в частности, Российским фондом фундаментальных исследований

(грант # 00-15-96800) и Государственной программой Российской Федерации “Физика твердотельных наноструктур”.

- 
1. E. Abrahams, S. V. Kravchenko, and M. P. Sarachik, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 251 (2001).
  2. B. Spivak, *cond-mat/0005328*.
  3. Э. Г. Батыев, *Письма в ЖЭТФ* **72**, 727 (2000).
  4. Э. Г. Батыев, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 635 (2001).