О лоренц-инвариантном соотношении неопределенностей энергия-время для релятивистского фотона

С. Н. Молотков

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 5 сентября 2001 г.

Обсуждается соотношение неопределенностей энергия-время для релятивистской безмассовой частицы. Найдено лоренц-инвариантное соотношение неопределенностей для среднеквадратичного отклонения энергии и разброса времени регистрации. Установлена связь данного соотношения неопределенностей с его аналогом в классическом случае.

PACS: 03.50.De, 03.65.Pm, 03.70.+k

Соотношение неопределенностей энергия-время

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2}\cdot\overline{(\Delta t)^2}\geq 1/4 \qquad (1)$$

в нерелятивистской квантовой механике является наименее четко определенным понятием в отличие от других подобных соотношений, например, координата-импульс [1 – 4]. В первую очередь это связано с тем, что время не является динамической переменной, которой отвечает эрмитов оператор, а представляет собой параметр. Ограниченность спектра гамильтониана снизу приводит к тому, что в общем случае невозможно ввести эрмитов оператор времени [5]. Соотношение неопределенностей энергия-время обсуждалось применительно к различным ситуациям в большом числе работ. Например, соотношение неопределенностей энергия-время, полученные в работе [6], относятся к внутренней эволюции квантовой системы и не описывают процесс измерения. В работах [7] был приведен гамильтониан квантовой системы, для которого возможно мгновенное (проводимое за сколь угодно малое время), точное и воспроизводимое измерение энергии. При этом, правда, не известно ни одного примера физической системы, для которой можно реализовать данный гамильтониан. Оставаясь в рамках формального аппарата нерелятивистской квантовой механики, не запрещается включать в гамильтониан внешние классические поля сколь угодно малой длительности и большой интенсивности, что существенно используется в [7]. Критику упомянутого выше подхода можно найти в работе [8]. В релятивистском случае ограничения, накладываемые специальной теорией относительности на измеримость квантовых состояний, впервые обсуждались в [9]. Дальнейшее исследование было предпринято в работе [10]. При этом оказывается, что, строго говоря, классически можно рассматривать лишь классические поля (потенциалы) в гамильтониане. Для полей, зависящих от времени, требуется квантовое рассмотрение. Поэтому вопрос о точном и воспроизводимом измерении энергии за сколь угодно малое время фактически лишь переносится в другую плоскость.

Хотя время не является динамической переменной, в экспериментах довольно обычна ситуация, когда измеряется время наступления события (event time) [11]. Пусть в эксперименте фиксируется время наступления события, в этом случае пространством результатов является время регистрации. Связь распределения вероятностей над пространством результатов (времени регистрации) и состоянием квантовой системы дается положительной операторнозначной мерой. Точнее говоря, каждому подмножеству пространства результатов $\Delta_t\in(-\infty,\infty)$ сопоставляется положительный оператор $\mathcal{M}(\Delta_t)$ такой, что

$$\mathcal{M}(\cup\Delta_{it})=\sum_i\mathcal{M}(\Delta_{it}),\quad \Delta_{it}\cap\Delta_{jt}=\emptyset. \qquad (2)$$

Условие нормировки – равенство единице полной вероятности наступления событий во всем пространстве результатов

$$\mathcal{M}(\Delta_{(-\infty,\infty)})=I,\quad \Delta_{(-\infty,\infty)}\equiv(-\infty,\infty). \qquad (3)$$

Кроме того, операторнозначная мера в разложении единицы (2) должна удовлетворять условию ковариантности. Сдвиги начала отсчета по времени в процедуре приготовления квантового состояния должны приводить к соответствующему сдвигу в распределении вероятностей; имеем

$$\hat{U}_{t_0}\mathcal{M}(\Delta_t)\hat{U}_{t_0}^{-1}=\mathcal{M}(\Delta_{t-t_0}), \qquad (4)$$

где $\hat{U}_t$ – оператор эволюции (сдвига во времени).

Можно ввести максимально симметричный оператор времени

$$\hat{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathcal{M}(t, dt). \tag{5}$$

Среднее значение времени регистрации дается стандартным соотношением

$$\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(t, dt)\rho\}, \tag{6}$$

где ρ – матрица плотности квантовой системы, над которой производится измерение.

Соответственно среднеквадратичное отклонение времен регистрации определяется как

$$\overline{(\Delta t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(t, dt)\rho\}. \tag{7}$$

Если $\hat{H}$ – гамильтониан системы, то для него имеет место спектральное представление

$$\hat{H} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon\mathcal{E}(\varepsilon, d\varepsilon), \tag{8}$$

где $\mathcal{E}(\varepsilon, d\varepsilon)$ – спектральное семейство ортогональных проекторов. Отметим, что операторнозначные меры $\mathcal{M}(t, dt)$, фигурирующие в (2), не являются ортогональными.

Средняя энергия и среднеквадратичное отклонение для системы в квантовом состоянии ρ определяется как

$$\bar{\varepsilon} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon\mathrm{Tr}\{\mathcal{E}(\varepsilon, d\varepsilon)\rho\}, \tag{9}$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \int_{0}^{\infty} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \mathrm{Tr}\{\mathcal{E}(\varepsilon, d\varepsilon)\rho\}. \tag{10}$$

Далее можно поставить вопрос о достижимой нижней границе для соотношения неопределенностей энергия-время, то есть вопрос о том, на каких квантовых состояниях достигается минимум функционала

$$\Omega = \min_{\{\rho\}} \left\{ \overline{(\Delta\varepsilon)^2} \cdot \overline{(\Delta t)^2} \right\}. \tag{11}$$

Ниже мы рассмотрим соотношение неопределенностей энергия-время в смысле (2)–(11) для одномерной безмассовой релятивистской частицы (фотона). Данный пример хотя и является в определенном смысле модельным, но тем не менее содержит все основные особенности. Кроме того, как правило многие эксперименты над фотонами проводятся на оптоволоконных системах, которые являются квазиодномерными объектами.

В релятивистском случае время не является абсолютной категорией, поэтому на первый взгляд соотношение неопределенностей энергия-время является еще менее четким понятием, чем в нерелятивистском случае. Однако специфика фотона состоит в том, что связь между импульсом и энергией является линейной. Кроме того, поскольку массовой поверхностью для безмассового поля является передняя часть светового конуса в импульсном представлении, то для состояний, распространяющихся в одном направлении, все события имеют место на световом конусе в пространстве-времени Минковского. Данная специфика приводит к тому, что соотношение неопределенностей энергия-время оказывается лоренц-инвариантным (не зависит от инерциальной системы отсчета, в которой проводится измерение). Нижняя граница в неравенстве (1) оказывается несколько больше 1/4.

Несмотря на то, что время не является абсолютной категорией в релятивистском случае и в отличие от нерелятивистского случая не существует понятия состояния (волновой функции) в данный момент времени, то есть, строго говоря, шредингеровское представление не существует, тем не менее соотношение неопределенностей энергия-время в смысле (2)–(11) является вполне четко определенным понятием.

Состояния свободного квантованного поля (точнее, обобщенные собственные векторы) порождаются действием на вакуумный вектор полевых операторов (обобщенных функций с операторными значениями) [12]

$$\varphi^{+}(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\hat{k}\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)\mathrm{e}^{i\hat{k}\hat{x}}a^{+}(\hat{k}), \tag{12}$$

$$\hat{k} = (k, k_0), \quad \hat{x} = (x, t), \quad \hat{k} = dkdk_0, \quad \hat{k}\hat{x} = kx - k_0 t.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a^{-}(\hat{k}), a^{+}(\hat{k}')] = k_0\delta(k - k'). \tag{13}$$

Физические состояния поля $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, принадлежащие гильбертову пространству состояний, определяются как результат сглаживания операторных обобщенных функций с основными функциями $\psi(\hat{x}) \in \Omega(\hat{x})$ (и $\varphi^{+}(\hat{x})|0\rangle \in \Omega^{*}(\hat{x})$ – обобщенные собственные векторы, непрерывные линейные функционалы над $\Omega(\hat{x})$, и $\Omega(\hat{x}) \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*(\hat{x})$ – оснащенное гильбертово пространство [13]). Имеем

$$|\psi\rangle = \int d\hat{x}\psi(\hat{x})\varphi^+(\hat{x})|0\rangle =$$
$$= \int d\hat{k}\psi(\hat{k})\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)a^+(\hat{k})|0\rangle =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k_0}\psi(k, k_0 = |k|)|\hat{k}\rangle, \tag{14}$$

$$|\hat{k}\rangle = a^+(\hat{k})|0\rangle, \quad \langle\hat{k}|\hat{k}'\rangle = k_0\delta(k-k'),$$

$$\psi(\hat{k}) = \int d\hat{x}\psi(\hat{x})\mathrm{e}^{-i\hat{k}\hat{x}},$$

здесь dk/k_0 – лоренц-инвариантный объем интегрирования.

Вклад в физическое состояние $|\psi\rangle$ дают значения амплитуды $\psi(k, k_0 = |k|)$ на массовой поверхности (передней части светового конуса в импульсном представлении).

Будем рассматривать состояния, распространяющиеся в одном направлении. Для состояний, распространяющихся в обоих направлениях, невозможно осмысленно ввести понятие времени наступления события. Для состояний, распространяющихся в одном направлении (будем для определенности считать $k > 0$) из-за линейной связи, энергия и импульс представляют собой одно и то же, $k_0 = |k| = k$. Для таких состояний вклад в (14) дают лишь векторы с $k > 0$, и амплитуда $\psi(k,k)$ отлична от нуля при $k > 0$.

Измерение энергии (импульса) дается разложением единицы в одночастичном подпространстве состояний:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k_0}|\hat{k}\rangle\langle\hat{k}| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(k, dk),$$
$$\mathcal{M}(k, dk) = |\hat{k}\rangle\langle\hat{k}|\frac{dk}{k_0}, \ I_+ = \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{M}(k, dk). \tag{15}$$

Реально нам достаточно ограничиться подпространством состояний, натянутом на векторы $|\hat{k}\rangle$ с $k > 0$, I_+ – единица в этом подпространстве. Вероятность получить значение энергии (импульса) при измерении в интервале $(k, k + dk)$ дается формулой

$$\mathbf{Pr}\{dk\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(k, dk)|\psi\rangle\langle\psi|\} =$$
$$= |\psi(k,k)|^2\frac{dk}{k} = |f(k)|^2 dk, \quad f(k) = \frac{\psi(k,k)}{\sqrt{k}}. \tag{16}$$

Среднее значение энергии (импульса) в состоянии $|\psi\rangle$ равно

$$\overline{k} = \int\limits_0^{\infty} k\mathbf{Pr}\{dk\} = \int\limits_0^{\infty} k|f(k)|^2 dk, \tag{17}$$

и среднеквадратичное отклонение

$$\overline{(\Delta k)^2} = \int\limits_0^{\infty} (k - \overline{k})^2\mathbf{Pr}\{dk\} = \overline{k^2} - (\overline{k})^2,$$
$$\overline{k^2} = \int\limits_0^{\infty} k^2\mathbf{Pr}\{dk\}. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь измерение положения частицы, последнее для состояний, распространяющихся в одном направлении ($k > 0$), может быть представлено в виде разложения единицы:

$$I_+ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k}}\mathrm{e}^{-i\hat{k}\hat{x}}|\hat{k}\rangle\right)\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{k'}}\langle\hat{k}'|\mathrm{e}^{i\hat{k}'\hat{x}}\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k}}\mathrm{e}^{-ik\tau}|\hat{k}\rangle\right)\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{k'}}\langle\hat{k}'|\mathrm{e}^{ik'\tau}\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(\tau, d\tau), \tag{19}$$

где $\tau = x - t$. Измерение координаты x является, по сути, измерением времени срабатывания t. Более точно, пространством результатов реально является по отдельности не x или t, а их разность τ. Разложение единицы (19) является формальным описанием прибора, которое может быть интерпретировано следующим образом. Если считать пространством результатов x, то измерение следует понимать как распределенный по x прибор, который выдает случайный результат в одной точке $(x, x + dx)$ в момент t. Если фиксировать x, то измерение описывает локальный по x прибор, работающий в ждущем режиме, который выдает результат в случайный момент времени $(t, t + dt)$. То обстоятельство, что операторнозначная мера $\mathcal{M}(\tau, d\tau)$ в (19) зависит лишь от разности $\tau = x - t$, выражает тот факт, что если результат с какой-то вероятностью может быть получен в точке x в момент времени t, то с той же вероятностью он может быть получен в другой точке x', но в момент времени $t' = x' - x + t$.

Соответственно вероятность получения результата в интервале времени $(\tau, \tau+\tau)$ по определению равна

$$\mathbf{Pr}\{d\tau\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(\tau, d\tau)|\psi\rangle\langle\psi|\} = |f(\tau)|^2 d\tau, \qquad (20)$$

$$f(\tau) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}}\psi(k,k)\mathrm{e}^{-ik\tau}. \qquad (21)$$

Обратим внимание на то, что $f(\tau)$ по сути совпадает с волновой функцией Ландау – Пайерлса в координатном представлении [14]. Среднее значение $\overline{\tau}$ может быть выбрано, в отличие от $\overline{k}$, нулем путем соответствующего выбора начала отсчета времени. Среднеквадратичное отклонение времени регистрации

$$\overline{(\Delta\tau)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathbf{Pr}\{d\tau\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |f(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty dk dk' f(k) f^*(k') \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \mathrm{e}^{i(k-k')\tau} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty dk dk' f(k) f^*(k') \frac{\partial^2}{\partial k \partial k'}\delta(k-k') =$$

$$= \int_0^\infty \left|\frac{df(k)}{dk}\right|^2 dk. \qquad (22)$$

Дальнейшая задача сводится к нахождению состояния $|\psi\rangle$, на котором достигается минимум функционала (11):

$$\Omega(f) = \left(\int_0^\infty \left|\frac{df(k)}{dk}\right|^2 dk\right)\left(\int_0^\infty (k^2 - \overline{k}^2)|f(k)|^2 dk\right) \qquad (23)$$

с дополнительным условием нормировки состояния

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k}|\psi(k,k)|^2 = \int_0^\infty |f(k)|^2 dk = 1. \qquad (24)$$

Оказывается, что задача

$$\delta\Omega(f)/\delta f = 0 \qquad (25)$$

нахождения минимума функционала (23) решалась для классических сигналов в элегантной, но малоизвестной работе [15] еще в 1934 г. (см. также [16,17]). Было показано, что для определенного таким образом соотношения неопределенностей для частоты и времени как и в (23), достигает минимума на четных функциях времени $f(\tau)$ (соответственно, $df(k)/dk|_{k=0} = 0$). Вариационная задача при этом сводится к дифференциальному уравнению второго порядка для $f(k)$ вида

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) f(x) = 0,$$

$$x = \left(\frac{4a}{b-c^2}\right)^{1/4}(k-c), \qquad (26)$$

$$\nu + \frac{1}{2} = \sqrt{a(b-c^2)},$$

где

$$a = \int_0^\infty \left(\frac{df(k)}{dk}^2\right)^2 dk, \quad b = \int_0^\infty k^2 f(k)^2 dk,$$

$$c = \int_0^\infty k f(k)^2 dk, \quad \int_0^\infty f^2(k) dk = 1, \qquad (27)$$

здесь значения интегралов a, b, c берутся на экстремали. С учетом условия $df(k)/dk|_{k=0} = 0$ и того, что на экстремали $b = 3c^2/2$, решением является функция параболического цилиндра (функция Вебера) $D_\nu(x)$ [18]. При этом величина ν определяется из условия $D'_\nu(x) = dD_\nu(x)/dx = 0$, при $k = 0$, что эквивалентно с учетом

$$D_\nu(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\xi - \xi^2/2}\xi^{-\nu-1} d\xi \qquad (28)$$

решению трансцендентного уравнения

$$D'_{\mu-\frac{1}{2}}(-2\sqrt{\mu}) = 0,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{2\sqrt{\mu}\xi - \xi^2/2}\xi^{-\mu-1/2}(\xi - \sqrt{\mu}) d\xi = 0, \qquad (29)$$

где $\mu = \nu + 1/2$. Численное значение приведено в [17]: $\mu^2 = 0.2951...$ При этом значение функционала в экстремуме равно

$$\Omega_{min}(f) = \frac{a \cdot b}{3} = \mu^2 = 0.2951. \qquad (30)$$

Покажем теперь, что данные соотношения неопределенностей энергия-время являются лоренц-инвариантными, то есть остаются неизменными при измерении квантового состояния в любой инерциальной системе отсчета. Сами измерения в системе отсчета наблюдателя записываются так же, как и (15), (19), при этом под всеми величинами в (15), (19) нужно понимать их значения в системе отсчета наблюдателя, а в качестве квантового состояния, которое "видит" наблюдатель в подвижной системе отсчета, следует взять состояние, которое получается действием соответствующего унитарного оператора представления группы Пуанкаре. Общее преобразование координат в группе Пуанкаре представляет собой трансляции в пространстве-времени Минковского и лоренцевский поворот; имеем

$$\hat{x}' = \hat{P}(\hat{a})\hat{L}\hat{x} = \hat{L}\hat{x} + \hat{a}, \tag{31}$$

где $\hat{P}(\hat{a})$ – оператор трансляции на вектор $\hat{a} = (a, a_0)$, $\hat{L}$ – оператор лоренцева поворота, описывающий переход в другую инерциальную систему. Данные преобразования индуцируют преобразования операторов

$$\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})a^+(\hat{k})\hat{\mathbf{U}}^{-1}(\hat{L},\hat{a}) = \mathrm{e}^{i\hat{L}\hat{k}\cdot\hat{a}}a^+(\hat{L}\hat{k}), \tag{32}$$

здесь $\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})$ – унитарный оператор, действующий в $\mathcal{H}$.

Преобразованное состояние, которое эффективно "видит" наблюдатель, есть

$$|\psi(\hat{L},\hat{a})\rangle = \hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|\psi\rangle =$$
$$= \int d\hat{x}\psi(\hat{x})\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})\varphi^+(\hat{x})\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})^{-1}\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|0\rangle =$$
$$= \int d\hat{x}\psi(\hat{x})\varphi(\hat{L}\hat{x}+\hat{a})|0\rangle =$$
$$= \int d\hat{x}\psi(\hat{L}^{-1}(\hat{x}-\hat{a}))\varphi^+(\hat{x})|0\rangle =$$
$$= \int d\hat{k}\psi(\hat{k})\mathrm{e}^{i\hat{k}\cdot\hat{a}}\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)a^+(\hat{L}\hat{k})|0\rangle =$$
$$= \int d\hat{k}\psi(\hat{L}^{-1}\hat{k})\mathrm{e}^{i\hat{k}\hat{a}}|\hat{k}\rangle =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k}\psi(\hat{L}^{-1}\hat{k})\mathrm{e}^{i\hat{k}\hat{a}}|\hat{k}\rangle =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k}\psi\left(\frac{k-\beta k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{k_0-\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\mathrm{e}^{i(ka-k_0a_0)}|\hat{k}\rangle, \tag{33}$$

где dk/k_0 – лоренц-инвариантный объем интегрирования, в (33) также учтена инвариантность вакуумного вектора $\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|0\rangle = |0\rangle$. Напомним, что рассматриваются состояния, распространяющиеся в одном направлении оси x. Окончательно состояние, которое "видит" наблюдатель, представляется в виде

$$|\psi(\hat{L},\hat{a})\rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k}\psi\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)|\hat{k}\rangle. \tag{34}$$

Среднее значение энергии (импульса) при измерениях наблюдателя определяется как (будем снабжать индексом m значения величин в подвижной системе отсчета)

$$\overline{k_m} = \int_0^\infty k\mathbf{Pr}\{dk\} =$$
$$= \int_0^\infty k\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(k,dk)|\psi(\hat{L},\hat{a})\rangle\langle\psi(\hat{L},\hat{a}|\} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k}k\left|\psi\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)\right|^2 = \overline{k}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{35}$$

при малых $\beta \ll 1$, среднее значение импульса (энергии) в подвижной системе отсчета связано со средним значением в неподвижной системе отсчета соотношением

$$\overline{k_m} = \overline{k}(1+\beta) = k(1+v/c), \tag{36}$$

что по сути представляет собой эффект Доплера.

Соответствующее среднеквадратичное отклонение энергии (импульса) в подвижной системе отсчета

$$\overline{(\Delta k)^2_m} = \int_0^\infty (k-\overline{k_m})^2\mathbf{Pr}\{dk\} =$$
$$= \int_0^\infty (k-\overline{k_m})^2\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(k,dk)|\psi(\hat{L},\hat{a})\rangle\langle\psi(\hat{L},\hat{a}|\} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k}(k-\overline{k_m})^2\left|\psi\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)\right|^2 =$$
$$= \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\overline{(\Delta k)^2}. \tag{37}$$

Среденеквадратичное отклонение времени регистрации в подвижной системе отсчета определяется как (здесь удобно сохранить общее начало отсчета, то есть считать, что $\hat{a} = 0$ и оставить только лоренцевский поворот $\hat{L}$)

$$\overline{(\Delta\tau)^2_m} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\mathbf{Pr}\{d\tau\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(\tau,d\tau)|\psi(\hat{L},\hat{0})\rangle\langle\psi(\hat{L},\hat{0}|\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\left|\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}}\mathrm{e}^{-ik\tau}\psi\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)\right|^2\frac{d\tau}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \left| \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k}} \exp\left\{-ik\left(\tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)\right\}\psi(k,k)\right|^2 \times$$

$$\times\, d\left(\frac{\tau}{2\pi}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) = \overline{(\Delta\tau)^2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right). \qquad (38)$$

Результирующее соотношение неопределенностей энергия-время в подвижной системе отсчета наблюдателя связано, с учетом (37) и (38), с соотношением неопределенностей в исходной системе следующим образом:

$$\overline{(\Delta k)^2_m} \cdot \overline{(\Delta\tau)^2_m} = \overline{(\Delta k)^2} \cdot \overline{(\Delta\tau)^2} = 0.2951.. > 1/4, \qquad (39)$$

то есть является лоренц-инвариантным.

Факт лоренц-инвариантности соотношения неопределенностей энергия-время, по сути, связан с ковариантностью измерений энергии (импульса) и времени наступления события. Действительно, операторнозначная мера в (19) удовлетворяет условию ковариантности относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})\mathcal{M}(\tau,d\tau)\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})^{-1} =$$

$$= \mathcal{M}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tau - (a-a_0), d\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tau\right)\right). \qquad (40)$$

Измерение импульса и ортогональная операторная мера в (15) также удовлетворяют условию ковариантности:

$$\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})\mathcal{M}(k,dk)\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})^{-1} =$$

$$= \mathcal{M}\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}k, d\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}k\right)\right). \qquad (41)$$

Если измерения относятся к той же инерциальной системе отсчета $\hat{L} = \hat{1}$, то условие ковариантности (41) аналогично нерелятивистскому (4) случаю, с той разницей, что ковариантость понимается в смысле трансляций в пространстве-времени Минковского (в нашем случае – сдвигов по ветви светового конуса).

Выражаю благодарность С.С.Назину за полезные обсуждения и критические замечания.

Работа поддержана проектами "Физические основы квантового компьютера" и "Электронные состояния".

1. W. Heisenberg, Z. Phys. **60**, 56 (1927).
2. Н. Бор, *Избранные научные труды*, т.2, М.: Наука, 1971.
3. Н.С. Крылов, В.А. Фок, ЖЭТФ **17**, 93 (1947).
4. E.P. Wigner, *On the time-energy uncertainty relation*, in *Aspects of Quantum Theory*, Eds. A. Salam and E.P. Wigner, Cambridge University Press, Mass., 1972, p. 237.
5. A.S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
6. Л.И. Мандельштам, И.Е. Тамм, Изв. АН СССР, сер. физич. **9**, 122 (1945).
7. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961); Y. Aharonov and J.L. Safko, Ann. Phys. **91**, 279 (1975).
8. В.А. Фок, ЖЭТФ **42**, 1135 (1962).
9. Л.Д. Ландау, Р. Пайерлс, Zeits. für Phys. **69**, 56 (1931); *Собрание трудов*, т.1, М.: Наука, 1969, с. 56.
10. Н. Бор, Л. Розенфельд, Math.-Fys. Medd. **12**, 3 (1933); *Собрание научных трудов*, М.: Наука, 1971.
11. P.Busch, *The Time Energy Uncertainty Relation*, quant-ph/0105049; P. Busch, M. Grabowski, and P.J. Lahti, *Operational Quantum Physics*, Springer Lecture Notes in Physics, v. **31**, 1995.
12. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, М.: Наука, 1987.
13. И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции,* вып.4*)*, М.: Физматгиз, 1961.
14. Л.Д. Ландау, Р. Пайерлс, *Собрание трудов*, т.1, М.: Наука, 1969, с. 56 (Zeits. für Phys. **62**, 188 (1930)).
15. А.Г. Майер, Е.А. Леонтович, ДАН СССР **4**, 353 (1934).
16. А.А. Харкевич, *Спектры и анализ*, М.: Физматгиз, 1962.
17. В.В. Додонов, В.И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН, т. **183**, 1987.
18. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, М.: Наука, 1966.