Письма в ЖЭТФ, том 74, вып. 10, с. 575 – 579

Квантовая когерентность между состояниями с четным и нечетным числами электронов

А. Ф. Андреев[1)]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 октября 2001 г.

Указаны системы с переменным числом электронов, в которых реализуются состояния, являющиеся когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числами электронов. Предложен эксперимент, являющийся обобщением эксперимента Накамуры и др., который может дать прямое доказательство такой когерентности и тем самым подтвердить реальность суперпространства (superspace).

PACS: 03.65.-w, 85.35.-p

В 1952 г. Вик, Вайтман и Вигнер [1], отметив, что существование когерентных линейных суперпозиций состояний с четным и нечетным числами фермионов несовместимо с лоренц-инвариантностью, ввели правило сверхотбора (superselection rule), согласно которому такие линейные суперпозиции физически невозможны. В действительности, как отмечалось ранее [2, 3], правило сверхотбора является альтернативой существования наряду с x, y, z, t дополнительных спинорных координат, фактически введенных в квантовой теории поля для реализации суперсимметрии.

Дело в том, что вектор $|\mathrm{odd}\rangle$ любого состояния с нечетным числом фермионов, будучи спинором нечетного ранга, умножается на (-1) при поворотах $\mathbf{O}(2\pi)$ системы координат на угол 2π вокруг любой оси и при двойном обращении (reversal) времени $\mathbf{R}^2$. Векторы $|\mathrm{even}\rangle$ состояний с четным числом фермионов не меняются при преобразованиях $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$. Поэтому существование когерентной линейной суперпозиции $a\,|\mathrm{even}\rangle + b\,|\mathrm{odd}\rangle$ (a, b — ненулевые комплексные числа) означает существование состояния, изменяющегося физически при преобразованиях $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$, поскольку изменение вектора состояния в данном случае не сводится к появлению общего фазового множителя.

Если x, y, z, t являются исчерпывающими характеристиками пространства-времени, то преобразования $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$ совпадают с тождественным преобразованием, относительного которого ничто не может физически измениться. Правило сверхотбора при этом необходимо. Если же наряду с x, y, z, t существуют спинорные координаты, то преобразования $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$ являются реальными физическими преобразованиями, меняющими знак дополнительных координат. Правило сверхотбора в этом случае необязательно. Таким образом, доказательство осуществимости состояний, соответствующих когерентным суперпозициям состояний с четным и нечетным числами фермионов является в то же время доказательством реальности суперпространства, характеризующегося дополнительными спинорными координатами. Подчеркнем, что речь не идет здесь о самой суперсимметрии, в которой одновременно присутствуют и дополнительные спинорные координаты и правило сверхотбора (см.[4]).

В настоящей работе теоретически доказано, что правило сверхотбора является, вообще говоря, несамосогласованным. Именно, указаны реально осуществимые простые системы с переменным числом электронов, характеризующиеся гамильтонианами, все собственные векторы которых являются когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числами электронов. Идея доказательства заключается в следующем.

Число электронов является сохраняющейся величиной, аналогичной в этом смысле импульсу и моменту импульса. Хорошо известны физические системы, характеризующиеся гамильтонианами, все собственные векторы которых являются когерентными суперпозициями состояний с различными значениями импульса. Простейшей такой системой является частица, находящаяся во внешнем, зависящем от ее координаты потенциальном поле. Фактически при этом речь идет о частице, являющейся частью изолированной системы, состоящей из самой частицы и какого-то массивного тела, взаимодействие с которым может быть описано как действующее на частицу внешнее поле. Для этого, как известно, необходимо выполнение определенных условий. Напри-

[1)] e-mail: andreev@kapitza.ras.ru

мер, условия адиабатической подстройки состояния массивного тела под изменение координаты частицы, обеспечивающей невозможность возбуждения собственных степеней свободы тела.

Ниже указаны системы с переменным числом электронов, которые вместе с окружением образуют изолированную совокупную систему с заданным числом электронов. Взаимодействие системы с окружением (являющимся аналогом массивного тела в рассмотренном выше примере) может быть описано как действующее на систему внешнее поле. В данном случае это поле не коммутирует с оператором электронов в системе (в полной аналогией с тем, что потенциальная энергия взаимодействия частицы с массивным телом не коммутирует с оператором импульса частицы). Более того, это поле имеет спинорный характер, т.е. оно меняет знак при преобразованиях $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$. Все собственные функции гамильтониана системы являются когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числами электронов.

Ниже будет также предложен эксперимент, являющийся обобщением эксперимента Накамуры и др. [5] по наблюдению квантовой когерентности состояний с различными (но в обоих случаях четными) числами электронов, осуществление которого прямо продемонстрировало бы когерентность между состояниями с четным и нечетным числами электронов.

1. Рассмотрим два типичных примера, когда взаимодействие двух частей совокупной замкнутой системы может быть описано в терминах спинорных внешних полей.

Пусть имеются две квантовые точки (quantum dots) и один электрон, который может находиться либо в одной, либо в другой из них, имея близкие значения энергии и определенную, раз навсегда заданную, проекцию спина. Квантовые точки имеют затворы (gates), изменяя электрические потенциалы которых можно изменять положение уровней энергии электрона. Полный набор состояний системы, в представлении чисел заполнения $|n,N\rangle$ состоит из двух состояний

$$|0,1\rangle\,, \quad |1,0\rangle\,. \tag{1}$$

Здесь n, N – числа электронов в первой точке (которую мы будем называть системой) и во второй точке (которую будем называть окружением). Характерным свойством состояний (1) является тот факт, что набор квантовых чисел окружения N однозначно определяется квантовыми числами системы: $N=1-n$. Именно это свойство обусловливает тот факт, что взаимодействие системы с окружением может быть описано как действующее на систему внешнее поле. Действительно, состояние системы, являющейся частью совокупной замкнутой системы, в общем случае описывается матрицей плотности

$$|q'\rangle\,\langle q| = \sum_Q |q',Q\rangle\,\langle Q,q|\,,$$

где q, Q – наборы квантовых чисел соответственно для системы и окружения, суммирование ведется по всем Q, возможным при заданных q и q'. В рассматриваемом нами случае в суммах отлично от нуля не более одного члена и матрица плотности системы в действительности соответствует чистому состоянию $|n\rangle = |n,1-n\rangle$.

Запишем гамильтониан совокупной системы с учетом туннелирования электрона между квантовыми точками в виде

$$H = H_0 + H_t, \tag{2}$$

где

$$H_0 = e(n) + E(N), \tag{3}$$

$e(n)$, $E(N)$ – зависящие от потенциалов затворов энергии квантовых точек без учета туннельного взаимодействия,

$$H_t = VaA^+ - V^*a^+A, \tag{4}$$

V – туннельная амплитуда, a, a^+, A, A^+ – операторы уничтожения и рождения электронов, соответственно, в системе и окружении. В обычном представлении (см. [6], §65) действие операторов A, A^+ на векторы (1) в тех случаях, когда результат не равен нулю, определяется формулами

$$A\,|0,1\rangle = |0,0\rangle\,, \quad A^+\,|1,0\rangle = -\,|1,1\rangle\,. \tag{5}$$

Подстановка формул (5) в гамильтониан (4) показывает, что в рассматриваемом случае туннельный гамильтониан эквивалентен следующему гамильтониану взаимодействия, содержащему лишь операторы самой системы:

$$H_\eta = \eta a + \eta^* a^+. \tag{6}$$

Здесь операторы a, a^+ действуют на векторы $|n\rangle$ по обычным для отдельно взятой системы правилам, η — внешнее поле, в рассматриваемом представлении равное $-V$. При этом полный гамильтониан системы равен

$$H = e(n) + E(1-n) + H_\eta, \tag{7}$$

так что полная энергия взаимодействия есть сумма второго и третьего членов в формуле (7). При преобразованиях $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$ поле η, как и операторы a и другие спинорные величины, меняет знак, так что при заданном значении поля гамильтониан (6) не инвариантен относительно этих преобразований. Из-за наличия членов, линейных по электронным операторам, все собственные состояния гамильтониана системы являются когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числами электронов.

2. Рассмотрим более сложную систему, которая является обобщением системы, реализованной в экспериментах Накамуры и др. [5]. Пусть "ящик для куперовской пары" B (single-Cooper-pair box) [5] соединен туннельными контактами с макроскопическим сверхпроводником (резервуаром куперовских пар) S и с квантовой точкой d. От системы Накамуры и др. наша система отличается наличием квантовой точки d. Кроме того, размеры ящика B должны быть таковы, что расстояние между соседними одноэлектронными энергетическими уровнями (single electron level spacing) в нем (которое порядка $\delta \sim E_F/N$, где E_F — энергия Ферми, N – полное число электронов в ящике) велико как по сравнению с температурой, так и по сравнению с амплитудами туннелирования электронов из ящика в d и S . В этом смысле ящик должен быть подобен системам, реализованным в экспериментах Ралфа и др. [7]. Ящик B и квантовая точка d имеют затворы, изменяя потенциалы U_B и U_d которых можно изменять относительное положение уровней энергии. Пусть $|0\rangle$ есть основное состояние ящика с энергией e_0, соответствующее наличию в нем определенного числа пар электронов (в пренебрежении туннелированием). Будем отсчитывать числом электронов n в B от его значения в состоянии $|0\rangle$. Изменяя U_B, можно добиться того, что энергия e_2 состояния $|2\rangle$ ящика с одной парой будет близка (в масштабах δ) к e_0. Энергия e_1 основного состояния при условии $n = 1$ при этом не будет близка к e_0.

Предположим, что квантовая точка d может быть либо пуста, либо содержать один электрон с произвольной проекцией спина (энергия состояния с двумя электронами с противоположными спинами велика из-за их кулоновского взаимодействия). Обозначим соответствующие энергии E_0 и E_1. Путем изменения U_d можно добиться того, чтобы сумма $e_1 + E_1$ была близка к e_2+E_0. Таким образом, совокупная система, состоящая из ящика B и его окружения $(S+d)$, может находиться в четырех состояниях с близкими энергиями (и нулевой суммарной проекцией спина). В представлении чисел заполнения $|n_1, n_2; N_1, N_2\rangle$, где n_α, N_α — числа электронов с проекциями спина $\alpha = 1, 2$ соответственно в ящике и точке,— это следующие состояния:

$$|0,0;0,0\rangle\,, \quad |1,0;0,1\rangle\,, \quad |0,1;1,0\rangle\,, \quad |1,1;0,0\rangle\,. \qquad (8)$$

Поскольку макроскопический сверхпроводник S содержит конденсат куперовских пар, его состояние не меняется при изменении числа пар на единицу. Появление же в сверхпроводнике одиночных электронов невозможно, поскольку энергетическая щель предполагается большой по сравнению с δ.

В состояниях (8) квантовые числа N_α окружения однозначно определяются квантовыми числами n_α ящика:

$$N_1 = (1-n_1)n_2, \quad N_2 = (1-n_2)n_1. \qquad (9)$$

По этой причине гамильтониан

$$H_t = V a_\alpha A_\alpha^+ - V^* a_\alpha^+ A_\alpha, \qquad (10)$$

где V – туннельная амплитуда, a_α, a_α^+, A_α, A_α^+ – электронные операторы соответственно для ящика и квантовой точки, описывающий туннельное взаимодействие B с d, эквивалентен гамильтониану

$$H_\zeta = V(a_1 n_2 + a_2 n_1) + \text{h.c.}, \qquad (11)$$

содержащему лишь операторы ящика. Действительно, путем прямой проверки легко убедиться в том, что все матричные элементы гамильтониана (10) между состояниями (8) равны соответствующим матричным элементам гамильтониана (11) между состояниями

$$|n_1, n_2\rangle = |n_1, n_2; (1-n_1)n_2, (1-n_2)n_1\rangle\,.$$

Отметим, что гамильтониан (10) имеет ненулевые матричные элементы, связывающие состояния (8) с состояниями с $N_1 = N_2 = 1$, которые, как отмечалось выше, имеют очень высокую энергию. Гамильтониан (11), являющийся эффективным гамильтонианом системы с четырьмя близкими по энергии состояниями, этих матричных элементов, естественно, не имеет.

Путем простых преобразований выражение (11) можно привести к виду

$$H_\zeta = \zeta n(a_1 + a_2) + \text{h.c.}, \qquad (12)$$

где $n = n_1 + n_2$, $\zeta = V$ — внешнее спинорное поле. Подчеркнем, что формулы (12) и (6) записаны в виде, явно не инвариантном относительно спиновых вращений. Дело в том, что относительно этих преобразований не инвариантно все наше рассмотрение, поскольку не инвариантны исходные наборы состояний (1) и (8) (в (8) наряду с синглетной комбинацией $|1,0;0,1\rangle$ - $|0,1;1,0\rangle$ содержится и триплетная $|1,0;0,1\rangle + |0,1;1,0\rangle$). Оба набора (1) и (8) являются полными наборами вырожденных (в отсутствие туннелирования) состояний, если система помещена во внешнее магнитное поле. Указанное обстоятельство несущественно, когда речь идет о симметрии относительно преобразований $\mathbf{O}(2\pi)$ и $\mathbf{R}^2$.

В силу уже отмечавшейся выше неизменности состояния сверхпроводника S при изменении на единицу числа куперовских пар в нем, туннельное взаимодействие ящика B со сверхпроводником S также может быть описано как действие скалярного внешнего поля J на B. Гамильтониан взаимодействия определяется известной формулой

$$H_J = Ja_2a_1 + \text{h.c.} \qquad (13)$$

Абсолютная величина $|J|$ поля есть половина джозефсоновской энергии (Josephson energy), фаза J определяется фазой параметра порядка в сверхпроводнике.

Полный гамильтониан ящика можно представить в виде

$$H = \left(2\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{2}\right) n + \left(\frac{\epsilon_2}{2} - \epsilon_1\right) n^2 + H_\zeta + H_J, \qquad (14)$$

где $\epsilon_1 = e_1 + E_1$, $\epsilon_2 = e_2 + E_0$ есть энергии состояний с одним ($n = 1$) и двумя ($n = 2$) электронами, начало отсчета энергии выбрано так, что энергия $e_0 + E_0$ основного состояния с $n = 0$ равна нулю.

Спинорные внешние поля рассматривались нами ранее [2], однако без указания точных условий, в которых взаимодействие системы с окружением фактически может быть описано с помощью внешних полей. Рассмотренный выше одноэлектронный пример по существу также обсуждался ранее (см. [8, 9], разд.5), на основании чего в [2, 3, 8, 9] был сделан вывод о несамосогласованности концепции правила сверхотбора.

3. Единственной возможностью, таким образом, является введение дополнительных спинорных координат пространства-времени. Если предположить, что эти координаты являются нерелятивистским пределом координат, вводимых в теории поля для реализации суперсимметрии, то мы приходим [2, 3] к антикоммутирующим $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0$ дополнительным спинорным координатам θ_α, $\alpha = 1, 2$. Какова бы ни была фактическая структура суперпространства в релятивистском случае, в нерелятивистском пределе для любой конкретной системы фермионов должна осуществляться эта простейшая возможность. Ситуация здесь аналогична тому, как от дираковских биспиноров или любых других релятивистских фермионных полей в нерелятивистском пределе для спина 1/2 остаются универсальные спиноры Паули. Как отмечалось ранее [2, 3], степени свободы, которыми обладают рассмотренные выше и в [2, 3] системы, характеризующиеся набором нескольких состояний с близкими энергиями при низких температурах в условиях полного вымерзания всех обычных пространственных степеней свободы, соответствуют "движению" системы "как целого" вдоль дополнительных координат θ_α. Операторы a_α^+ и a_α в гамильтонианах типа (6), (12) и (13) имеют при этом смысл коллективных фермионных координат и импульсов: $a_\alpha^+ = \theta_\alpha$, $a_\alpha = \partial/\partial\theta_\alpha$.

4. В предельном случае, когда энергия одноэлектронных состояний в системе (14) существенно выше всех других энергий, то есть $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$, $|J|$, $|V|$, система (14) переходит в двухуровневую систему Накамуры и др. [5], описываемую временны́ми уравнениями Шредингера

$$i\dot{a} = \tau b, \quad i\dot{b} = \epsilon b + \tau^* a, \qquad (15)$$

где $\tau = J$, $\epsilon = \epsilon_2$. Общее состояние этой двухуровневой системы есть суперпозиция $a\,|0,0\rangle + b\,|1,1\rangle$ состояний с различными, но четными числами электронов.

В предельном случае, когда $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, $|J|$, $|V|$, из (14) получается двухуровневая система второго типа, описываемая уравнениями (15) с $\epsilon = \epsilon_1 - 2|V|^2/\epsilon_2 + |J|^2/\epsilon_2$, $\tau = \sqrt{2}JV^*/\epsilon_2$. Ее общее состояние есть суперпозиция $a\,|0,0\rangle + (b/\sqrt{2})(|1,0\rangle - |0,1\rangle)$ состояний с четным и нечетным числами электронов в ящике.

Двухуровневой системой второго типа также является система, рассмотренная в п. **1**. Для нее $\tau = -V$, $\epsilon = e(1) - e(0) + E(0) - E(1)$, общее состояние равно $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

Эксперимент Накамуры и др. [5] заключается в следующем. До начального момента времени ($t = 0$) двухуровневая система находится в основном состоянии при таком значении потенциала затвора, что $\epsilon \gg \tau$. При этом $a = 1$, $b = 0$. При $t = 0$ потенциал затвора быстро меняется до такого значения, что $\epsilon = 0$. Затем потенциал остается постоянным в течение времени Δt, после чего быстро возвращается к первоначальному значению. На интервале между $t = 0$ и $t = \Delta t$ система описывается уравнениями (15) с $\epsilon = 0$ и начальными условиями $a(t = 0) = 1$, $b(t = 0) = 0$. При этом $a(t) = \cos|\tau|t$, $\overline{b}(t) = \sin|\tau|t$, где $\overline{b} \equiv (i\tau/|\tau|)b$, так что $|\overline{b}| = |b|$. При $t = \Delta t + 0$ измеряется заселенность возбужденного состояния

$$|b(\Delta t)|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2|\tau|\Delta t) \qquad (16)$$

как функция длительности импульса Δt. Это можно сделать, как в эксперименте Накамуры и др. [5], с помощью специального электрода (probe electrode), соединенного с ящиком туннельным контактом, или как в эксперименте Аасиме и др. [10], с помощью специального электрометра на основе одноэлектронного транзистора (single-electron transistor). Наблюдаемые осцилляции свидетельствуют о том, что на интервале времени $(0, \Delta t)$ система когерентно осциллирует между состояниями с числами электронов 0 и 2. Подобный эксперимент, проведенный с двухуровневыми системами второго типа, доказал бы, что соответствующие системы когерентно осциллируют между состояниями с числом электронов 0 и 1. Подчеркнем, что такая интерпретация осцилляций существенно основана на описании систем гамильтонианами (7) и (14), учитывающими взаимодействие с окружением путем введения полей J, ζ и η. В соответствии со сказанным в п. **3** рассмотренные системы представляют собой осцилляторы, движение которых происходит по фермионным координатам пространства θ_α. Если, однако, интерпретировать осцилляции (16) как явление, происходящее в совокупной замкнутой системе, то они свидетельствуют лишь об осцилляционных переходах электронов между различными частями системы. В соответствии с такой интерпретацией частота осцилляций пропорциональна $|\tau|$, то есть амплитудам туннелирования. Именно в этой связи важно отметить, что эксперимент типа эксперимента Накамуры и др. можно существенно усовершенствовать, если перейти от одноимпульсной методики к двухимпульсной.

Пусть, как и выше, при $t < 0$ двухуровневая система находится в основном состоянии $a = 1$, $b = 0$ при $\epsilon \gg |\tau|$. Первый прямоугольный импульс потенциала затвора имеет такую же, как и выше, амплитуду (соответствующую $\epsilon = 0$), но фиксированную длительность $t_1 = \pi/4|\tau|$. Сразу по завершении импульса при $t = t_1 + 0$ система находится в состоянии $a = \overline{b} = 1/\sqrt{2}$. На интервале между $t = t_1$ и $t = t_1 + \Delta t$ потенциал равен первоначальному значению, соответствующему $\epsilon \gg |\tau|$. В этих условиях туннельное взаимодействие системы с окружением несущественно и она ведет себя как замкнутая система, находящаяся в чистом состоянии. При этом $a(t) = 1/\sqrt{2}$, $\overline{b}(t) = (1/\sqrt{2})\exp(i\phi(t))$, причем относительная фаза между основным и возбужденным состояниями линейно зависит от времени $\phi(t) = -\epsilon(t - t_1)$.

Подчеркнем, однако, что было бы неверным считать, что и окружение также находится в чистом состоянии, а вектор состояния совокупной системы есть произведение векторов состояний ее частей. Состояние совокупной системы в данном случае есть так называемое “запутанное” (entangled) состояние (см.[11]).

В момент времени $t_1 + \Delta t$ включается второй импульс потенциала затвора, параметры которого такие же, как у первого импульса. С помощью уравнений (15) легко видеть, что по окончании второго импульса в момент времени $2t_1 + \Delta t$ (ввиду того, что $\epsilon \gg |\tau|$, фактически должно быть выполнено условие $\Delta t \ll t_1$) имеем

$$|b|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \epsilon \Delta t). \tag{17}$$

Наблюдение осцилляций заселенности (17) возбужденного состояния как функции расстояния Δt между импульсами продемонстрировало бы, что в замкнутой системе относительная фаза состояний с различным числом электронов имеет определенное значение $\phi(t)$, линейно зависящее от времени. Для двухуровневых систем второго типа это было бы прямым доказательством квантовой когерентности между состояниями с четным и нечетным числами электронов.

Настоящая работа выполнена во время визита автора в Университет Чалмерса (Chalmers University). Выражаю благодарность Т. Клаесону (T. Claeson), А. Данилову, Л. Кузьмину (L. Kuzmin) и Р. Шехтеру (R. Shekhter) за гостеприимство и полезные дискуссии.

---

1. G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
2. А. Ф. Андреев, Письма в ЖЭТФ **68**, 638 (1998).
3. A. F. Andreev, Physica **B 280**, 440 (2000).
4. P. G. O. Freund, *Introduction to supersymmetry*, Cambridge University Press, 1986, p.7.
5. Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai, Nature **398**, 786 (1999).
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1989.
7. D. C. Ralph, C. T. Black, and M. Tinkham, Phys.Rev. Lett. **74**, 3241 (1995),**76**, 688 (1996), **78**, 4087 (1997).
8. А. Ф. Андреев, УФН **168**, 655 (1998).
9. A. F. Andreev, Journ. of Superconductivity **12**, 197 (1999).
10. A. Aassime, G. Johansson, G. Wendin et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 3376 (2001).
11. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).