

Высокоэнергетичные оптические шредингеровские солитоны

В. Н. Серкин^{+*1)}, Т. Л. Беляева^{*□}

⁺Институт Общей физики РАН, 117942 Москва, Россия

^{*}Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Instituto de Ciencias, 72001 Puebla, Mexico

[□]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 ноября 2001 г.

Найдены условия существования пары Лакса и получены точные аналитические решения для нелинейных эволюционных уравнений шредингеровского типа с комплексными и неоднородными потенциалами, что, в частности, приводит к концепции солитонного менеджмента в прикладных задачах, а также решает проблемы оптимальной аккумуляции энергии шредингеровским солитоном в активной среде и усиления солитонов в волоконно-оптических линиях связи и солитонных лазерах.

PACS: 05.45.Yv, 42.65.Tg

Оптические солитоны, описываемые моделью нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), являются идеальными носителями бита информации [1–3]. Фирмой NTT в Японии уже проведены пионерские эксперименты по передаче информации оптическими солитонами в коммерческой волоконно-оптической сети Tokyo Metropolitan Network, работающей в обычном (линейном) режиме со скоростью 2.4 Гбит/с. В солитонном режиме в этой сети были получены скорости передачи информации 40 Гбит/с. Еще более впечатляющие результаты достигнуты в лабораторных условиях, где удается вплотную подойти к терабитному рубежу скорости передачи информации [2, 3].

Одной из центральных проблем полностью оптических (использующих в качестве ретрансляторов лазерные, а не электронные усилители) солитонных линий связи является проблема оптимального усиления оптических солитонов – увеличения энергии солитонов при полном сохранении бита информации и упругого характера их взаимодействия.

Подчеркнем, что, помимо важного прикладного значения в оптической солитонике, общефизический интерес к проблеме поиска новых интегрируемых моделей и их солитонных решений связан с общеизвестным фактом “универсальности солитонного подхода” в самых различных областях современной физики [4].

Проблема усиления солитонов имеет довольно длительную историю своего развития. После того, как в пионерских работах Захарова и Шабата [5, 6] была доказана полная интегрируемость модели НУШ и найдены ее канонические солитонные ре-

шения, в работах [7, 8] была построена адиабатическая теория возмущений для солитонов и было показано, что в системах, близких к интегрируемым, адиабатическое усиление (или поглощение) солитонов всегда сопровождается “отрастанием хвостов”, которые в реальном оптическом эксперименте приводят к потере упругого характера взаимодействия солитонов [9]. Применение аппарата обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) для адекватного анализа нелинейных волновых полей, формирующихся в процессе усиления оптических солитонов, показало [10], что рост энергии в солитонном импульсе сопровождается увеличением доли несолитонной компоненты излучения, а при переходе системы в неадиабатический режим усиления происходит “рождение” новых дополнительных солитонов (см. также экспериментальные работы, цитируемые в [9]). Решение задачи оптимального усиления солитонов зашло в тупик: эксперименты по генерации высокоэнергетичных солитонов проводятся в однородных неконсервативных системах, которые, однако, описываются неинтегрируемыми моделями, что в принципе не позволяет даже рассчитывать на усиление солитона как единого целого и сохранение его уникальных свойств.

Найденные в настоящей работе новые решения задачи об усилении оптических солитонов показывают, что существует реальная возможность “идеального” (как адиабатического, так и неадиабатического) усиления солитона при специальном контроле в эксперименте дисперсионных и нелинейных свойств неконсервативной системы.

Покажем, что задача об усилении шредингеровских солитонов в неоднородных и неконсервативных системах является вполне интегрируемой (имеет

¹⁾e-mail: vserkin@yahoo.com

представление Лакса), и найдем условия существования ее точных аналитических решений.

Метод поиска и решения интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, названный по именам его создателей методом спектральной задачи Захарова–Шабата [5, 6] и Абловица–Каупа–Ньюэла–Сегура [11], стал одним из наиболее значительных достижений математической физики. Запишем искомое нелинейное эволюционное уравнение как условие интегрируемости пары линейных дифференциальных уравнений, к которым может быть применен аппарат обратной задачи теории рассеяния:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0. \quad (1)$$

Это уравнение должно выполняться для любых значений спектрального параметра Λ и известно как обобщение представления Лакса (пары Лакса [12]), определяющего систему уравнений относительно потенциала рассеяния $q(x, t)$. Рассматривая общий случай зависящего от времени спектрального параметра и выбирая матрицы \hat{L} и \hat{A} в виде

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} -i\Lambda(t) & \sqrt{R(t)/D(t)}q(x, t) \\ -\beta\sqrt{R(t)/D(t)}q^*(x, t) & i\Lambda(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$A = i \left[\alpha(t)x - \frac{\beta}{2}R(t)|q(x, t)|^2 + \Gamma(t) + V(t)\Lambda + D(t)\Lambda^2 \right], \quad (3)$$

$$B = \sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}} \left[-\frac{i}{2}D(t)\frac{\partial}{\partial x} - V(t) - D(t)\Lambda \right] q(x, t), \quad (4)$$

$$C = \beta\sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}} \left[-\frac{i}{2}D(t)\frac{\partial}{\partial x} + V(t) + D(t)\Lambda \right] q^*(x, t), \quad (5)$$

нетрудно убедиться, что система (1) порождает нелинейное эволюционное уравнение для потенциала $q(x, t)$ следующего вида:

$$i\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}D(t)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta R(t)|q|^2 q - 2\alpha(t)xq + \frac{i}{2}\frac{W[R(t), D(t)]}{R(t)D(t)}q - iV(t)\frac{\partial q}{\partial t} - 2\Gamma(t)q. \quad (6)$$

Это уравнение, имеющее представление Лакса (1)–(5), отличается от канонического НУШ [5, 6] тем, что в нем помимо пространственно-временных неоднородных потенциалов $\alpha(t)x$, $D(t)$, $R(t)$ появляется дополнительный комплексный потенциал – коэффициент усиления

$$iG(t) = \frac{i}{2}\frac{W[R(t), D(t)]}{R(t)D(t)}, \quad (7)$$

который определяется вронскианом двух произвольных функций: дисперсии $D(t)$ и нелинейности $R(t)$: $W[R(t), D(t)] = RD'_t - DR'_t$.

Окончательно запишем систему линейных уравнений, решаемую методом обратной задачи рассеяния Захарова–Шабата:

$$\frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial x} = -i\Lambda\psi_1 + \sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}}q(x, t)\psi_2,$$

$$\frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial x} = -\beta\sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}}q^*(x, t)\psi_1 + i\Lambda\psi_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t} = i \left[\alpha(t)x + D(t)\Lambda^2 + V(t)\Lambda - \frac{1}{2}\beta R(t)|q(x, t)|^2 + \Gamma(t) \right] \psi_1 - \sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}} \left[(D(t)\Lambda + V(t))q(x, t) + \frac{i}{2}D(t)\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right] \psi_2,$$

$$\frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t} = \beta\sqrt{\frac{R(t)}{D(t)}} \times \left[(D(t)\Lambda + V(t))q^*(x, t) - \frac{i}{2}D(t)\frac{\partial q^*(x, t)}{\partial x} \right] \psi_1 + i \left[-\alpha(t)x - D(t)\Lambda^2 - V(t)\Lambda + \frac{1}{2}\beta R(t)|q(x, t)|^2 - \Gamma(t) \right] \psi_2. \quad (9)$$

В каноническом случае постоянных коэффициентов $D(t) = R(t) = 1$ и спектральном параметре

$\partial\Lambda/\partial t = \alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$ уравнение (6) существенно упрощается и принимает вид НУШ для Альфеновской волны в неоднородной плазме [13]:

$$i \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q - 2\alpha_0 x q. \quad (10)$$

Исторически частицеподобные решения уравнения (10) были получены в работе [13] и явились первым примером обобщения задачи Захарова – Шабата на случай зависящего от времени спектрального параметра. Найденные решения уравнения (10) существенно расширили само понятие солитона, обобщив его на случай ускоренного движения солитона во внешнем потенциале и отражения солитона от потенциала.

В рассматриваемом нами случае переменных и линейно независимых коэффициентов (7) решение уравнения (6) демонстрирует еще одно новое качество солитона: солитоны могут быть не только ускорены, но и усилены во внешнем потенциале, оставаясь при этом “истинными” солитонами (полностью сохраняя упругий характер взаимодействия при аккумуляции в них энергии).

Рассмотрим открывающиеся новые возможности на примере задач усиления оптических солитонов. Переход к задачам оптической солитоники в уравнениях (1)–(10) осуществляется с помощью замены [9]

$$q(x, t) \rightarrow \widetilde{\Psi}^\pm(Z, X); \quad x \rightarrow X; \quad t \rightarrow Z; \quad X = (t - Z/v)/\tau_0,$$

где τ_0 – начальная длительность импульса, Z – пространственная координата, нормированная на характерную длину дисперсионного расщепления импульса, X – для солитонов – импульсов безразмерное время в системе координат, движущейся с групповой скоростью, или для пространственных солитонов – пучков поперечная координата. Функция $\widetilde{\Psi}^\pm(Z, X)$ есть безразмерная комплексная огибающая волнового пакета.

С точки зрения практических приложений наибольший интерес представляют следующие полностью интегрируемые модели для усиления оптических солитонов в неоднородных системах.

1. Основное уравнение

$$i \frac{\partial \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial Z} = \pm \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial X^2} + \beta R(Z) |\widetilde{\Psi}^\pm|^2 \widetilde{\Psi}^\pm + \frac{i}{2} \frac{W[R(Z), D(Z)]}{R(Z)D(Z)} \widetilde{\Psi}^\pm. \quad (11)$$

2. Уравнения, производные от (11), которые описывают процесс аккумуляции энергии солитоном при произвольном коэффициенте усиления $G(Z)$:

$$i \frac{\partial \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial Z} = \pm \frac{1}{2} \Phi(Z) \exp \left\{ -2\gamma_0 Z + 2 \int_0^Z G(\zeta) d\zeta \right\} \times \\ \times \frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial X^2} + \beta \Phi(Z) |\widetilde{\Psi}^\pm|^2 \widetilde{\Psi}^\pm - i\gamma_0 \widetilde{\Psi}^\pm + iG(Z) \widetilde{\Psi}^\pm; \quad (12)$$

$$i \frac{\partial \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial Z} = \pm \frac{1}{2} F(Z) \frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}^\pm}{\partial X^2} + \beta F(Z) \exp \left\{ 2\gamma_0 Z - 2 \int_0^Z G(\zeta) d\zeta \right\} \times \\ \times |\widetilde{\Psi}^\pm|^2 \widetilde{\Psi}^\pm - i\gamma_0 \widetilde{\Psi}^\pm + iG(Z) \widetilde{\Psi}^\pm, \quad (13)$$

где функции $G(Z), R(Z), D(Z), \Phi(Z), F(Z)$ являются произвольными однократно интегрируемыми и дифференцируемыми действительными функциями.

Аналитические решения уравнения (11) для так называемых фундаментальных светлых и темных (покоящихся) солитонов имеют вид

$$\widetilde{\Psi}^\pm(Z, X) = \sqrt{\frac{D(Z)}{\beta R(Z)}} \times \\ \times \left[\begin{array}{l} \eta \operatorname{sech}(\eta X) \exp \left\{ -0.5i\eta^2 \int_0^Z D(\zeta) d\zeta \right\} \\ \eta \operatorname{th}(\eta X) \exp \left\{ -i\eta^2 \int_0^Z D(\zeta) d\zeta \right\} \end{array} \right]. \quad (14)$$

Рассмотрим ряд конкретных примеров.

1. Нелинейное туннелирование шредингеровского солитона через уединенную линию усиления (поглощения). Представим комплексный потенциал (7) $iG(Z)$ в уравнении (11) в виде уединенной линии усиления, например, вида

$$G(Z) = g + \operatorname{sech}^2 [\delta(Z - Z_0)], \quad (15)$$

где параметр g описывает линейные потери в системе. Тогда рассматриваемая модель оказывается полностью интегрируемой, если функция $D(Z)$ (назовем ее функцией дисперсионного контроля) имеет вид

$$D(Z) = \exp \left\{ -2gZ + \frac{2}{\delta} \left[\frac{\operatorname{sh}(\delta Z)}{\operatorname{ch}[\delta(Z - Z_0)] \operatorname{ch}(\delta Z_0)} \right] \right\}. \quad (16)$$

Динамика усиления солитона в параметрической области (15), (16) представлена на рис.1. Нетривиальность процесса усиления солитона состоит в том,

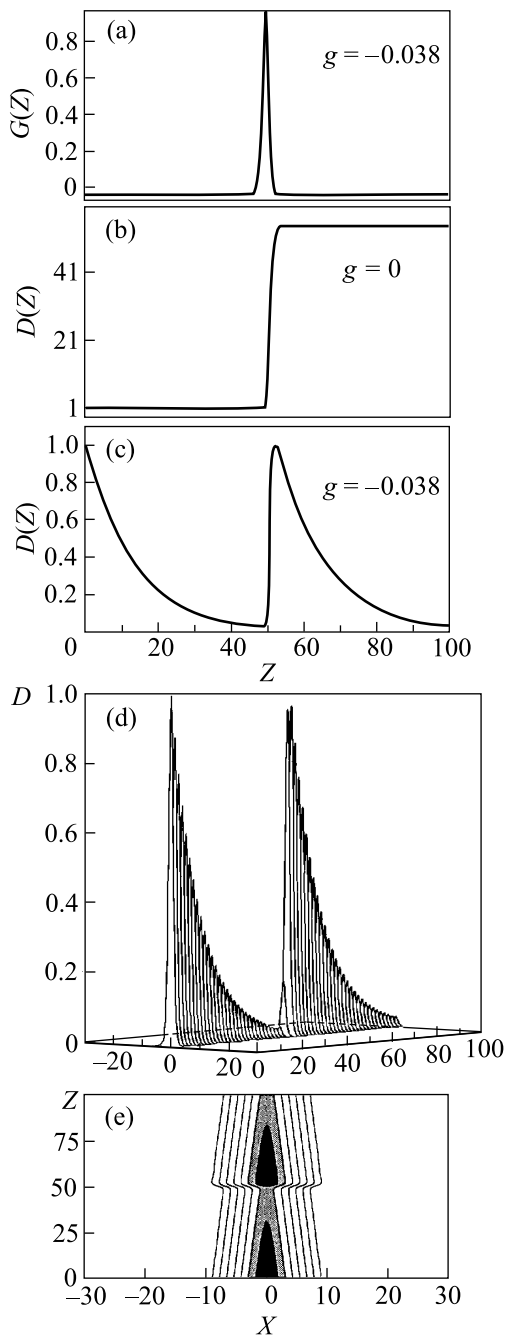


Рис.1. Нелинейное туннелирование шредингеровского солитона через потенциальный барьер (15) (уединенную линию усиления): (a)–(c) зависимость коэффициента усиления $G(Z)$ и соответствующего ему дисперсионного параметра $D(Z)$ от длины Z при $R(Z) = 1$, $Z_0 = 50$, $\delta = 1.0$ и двух значениях параметра g : 0.0 и -0.038 ; (d), (e) формирование высокоэнергетического солитона в параметрической области (15), (16) при параметрах $R(Z) = 1$, $Z_0 = 50$, $\delta = 1.0$, $g = -0.038$. (e) – эквипотенциали $D = 0.1, 0.01, \dots$

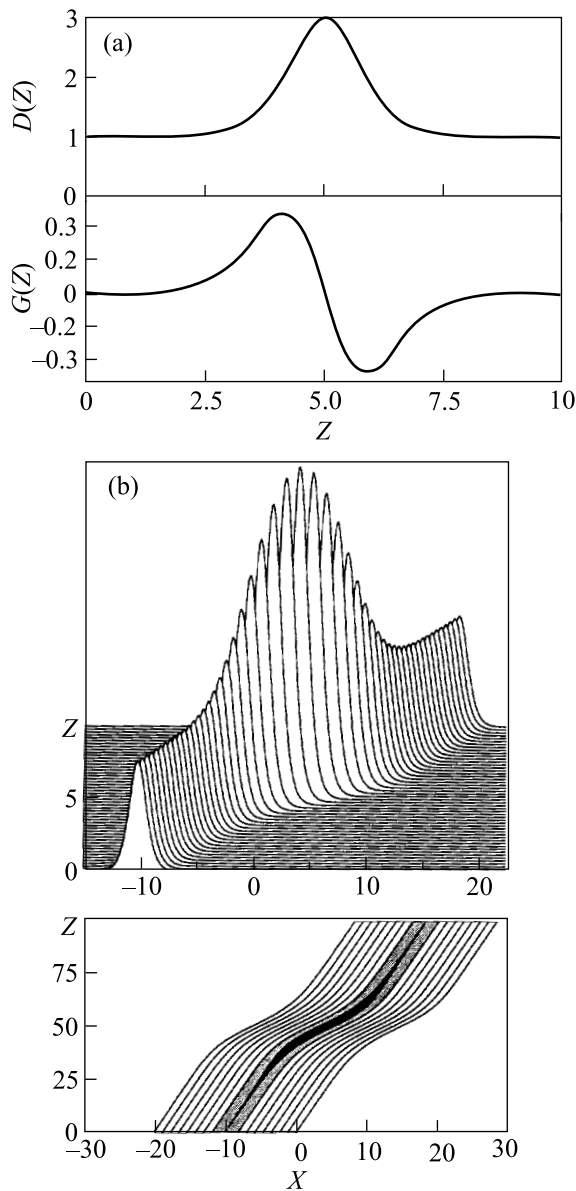


Рис.2. Нелинейное туннелирование шредингеровского солитона через уединенный дисперсионный барьер (17): (a) зависимость формы потенциального барьера $D(Z)$ и соответствующего ему потенциала $G(Z)$ от длины Z при $\varepsilon = 2.0$, $\delta = 1.0$, $Z_0 = 5$, $R(Z) = 1$; (b) пространственно-временная динамика солитонного импульса. На нижнем графике эквипотенциали $D = 1, 0.1, \dots$

что скачок потенциала $G(Z)$ (15) с необходимостью требует соответствующего скачка в $D(Z)$ (16) даже в отсутствие линейных потерь излучения в системе.

Процесс усиления солитона становится еще более интересным в том случае, когда в системе присутствуют ненулевые линейные потери. Как следует из (16), существует значение g , при котором первоначаль-

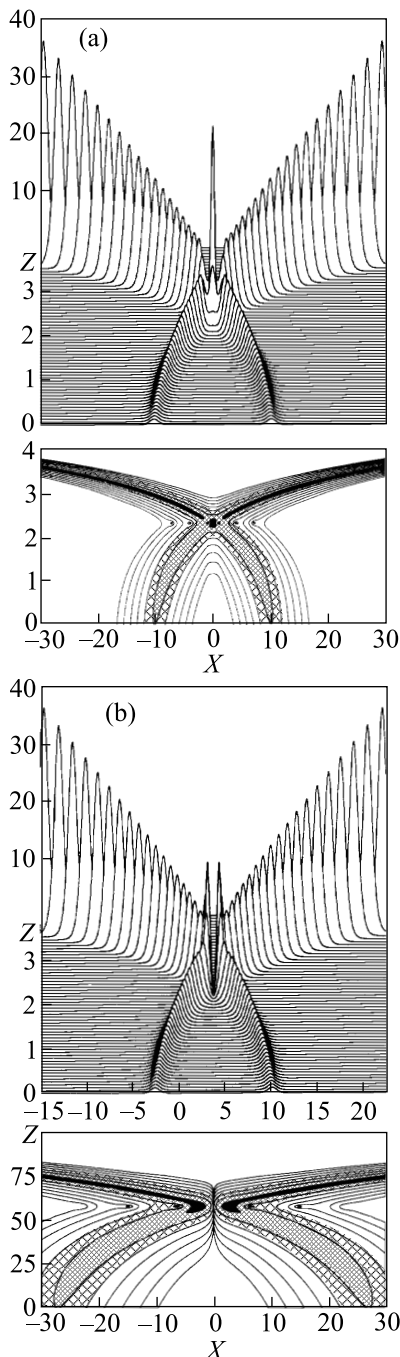


Рис.3. Нелинейная динамика взаимодействия синфазных (а) и противифазных (б) высокоэнергетичных солитонов $\tilde{\Psi}(Z, X) = \exp(G_0 Z) \eta \operatorname{sech}(\eta X) \times \exp\left\{-\frac{i\eta^2}{4G_0} [\exp(2G_0 Z) - 1]\right\}$ для модели $i\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial Z} = \frac{1}{2} \exp(2G_0 Z) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial X^2} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} + iG_0 \tilde{\Psi}$, рассчитанная при параметрах: $G_0 = 1.0$, $\eta = 1.0$, и расстройке групповых скоростей $\Delta V = 2.0$ ($V_1 = -1.0$, $V_2 = 1.0$). На графиках эквипотенциали $D = 10, 1, 0.1, \dots$

начально затухающий в линии солитон полностью восстанавливает свои параметры (см. рис.1).

2. Нелинейное туннелирование шредингеровского солитона через дисперсионные (или нелинейные) ямы и барьеры. Представим действительную функцию $D(Z)$ (или $R(Z)$) в виде уединенного потенциального барьера, например, вида

$$D(Z) = 1 + \varepsilon \operatorname{sech}^2 [\delta(Z - Z_0)]. \quad (17)$$

Тогда модель (11) оказывается полностью интегрируемой, если комплексный потенциал $iG(Z)$ имеет вид (7), где

$$G(Z) = -\frac{\varepsilon \delta \operatorname{sech}^2 [\delta(Z - Z_0)] \operatorname{th}[\delta(Z - Z_0)]}{\{1 + \varepsilon \operatorname{sech}^2 [\delta(Z - Z_0)]\}}. \quad (18)$$

Динамика туннелирования солитона через дисперсионный барьер (17) показана на рис.2.

Таким образом, существуют полностью интегрируемые обобщенные модели НУШ для усиления шредингеровских солитонов (11)–(13). Компьютерное моделирование, выполненное для самых различных функций, удовлетворяющих условию полной интегрируемости модели (11), подтверждает вывод об упругом характере взаимодействия полученных решений. Характерный пример упругого взаимодействия шредингеровских солитонов в процессе усиления приведен на рис.3.

Найденное представление Лакса и точные аналитические решения для модели (11) теоретически обосновывают идею солитонного менеджмента [14, 15]. Действительно, как следует из (11)–(13), любое изменение какого-либо параметра солитонной системы – это может быть солитонная линия связи или солитонный лазер – требует соответствующей корректировки остальных параметров. Изменение только одного параметра, например, периодическое чередование знаков дисперсионного параметра $D(Z)$ в системе с так называемым “fiber dispersion management” [2, 3], приводит к потере солитонной системой свойства полной интегрируемости. В этой связи рекомендации для дизайнеров солитонных линий связи, обоснованные в работе [16], имеют принципиальное значение. Кардинальное отличие решений, полученных в данной работе, от [14, 15] состоит в том, что для их экспериментальной реализации не требуется какой-либо начальной частотной модуляции в солитонном импульсе, тогда как решения [14, 15] существуют только при наличии таковой, причем однозначно связанной с параметрами солитонного импульса: его длительностью и амплитудой, изменяющимися в соответствии с

пространственными вариациями фазовой модуляции канализуемого излучения.

Кроме того, специфика рассмотренных явлений нелинейного туннелирования шредингеровских солитонов через комплексные (усиливающие) потенциалы и генерации высокоэнергетичных солитонов состоит в том, что в процессе набора солитоном энергии его длительность остается постоянной. Это обстоятельство имеет чрезвычайно важное значение для солитонных линий связи [2, 3].

Решение задачи оптимального усиления оптических солитонов представлено в данном письме в самом общем виде и легко позволяет подобрать оптимальные соотношения между функциями $D(Z)$, $R(Z)$, $G(Z)$ для каждого конкретного эксперимента. Ответ на принципиальный вопрос о предельной энергии и длительности солитона в активных лазерных системах требует дополнительных исследований, основанных, например, на прямых методах решения систем нелинейных уравнений Максвелла [17]. В заключение следует подчеркнуть, что представление Лакса (1)–(5) и модель (6) не являются единственно возможными. Более сложные полностью интегрируемые модели усиления солитонов будут опубликованы в регулярной статье.

В заключение авторы пользуются предоставленной им возможностью выразить глубокую благодарность академикам РАН А. М. Прохорову и Е. М. Дианову за поддержку и плодотворные обсуждения задачи. Именно поставленный ими “старый” вопрос о том, каким образом можно осуществить быстрое (неадиабатическое) усиление солитонов в системе связи и солитонном лазерном усилителе, стимулировал продолжение наших исследований, начатых еще в [10].

Авторы выражают также благодарность Benemerita Universidad Autonoma de Puebla за поддержку работы на заключительном этапе ее выполнения.

1. L. F. Mollenauer, R. G. Stolen, and J. R. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1095 (1980).
2. *Massive WDM and TDM Soliton Transmission Systems*, Ed. Akira Hasegawa, Kluwer Academic Publishers, 2000.
3. M. Nakazawa, H. Kubota, K. Suzuki et al., *Chaos* **10**, 486 (2000).
4. J. A. Krumhansl, *Unity in the Science of Physics*, *Physics Today* **33**, March (1992).
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ* **61**, 118 (1971).
6. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ* **64**, 1627 (1973).
7. В. И. Карпман, Е. М. Маслов, *ЖЭТФ* **75**, 504 (1978).
8. V. I. Karpman and V. V. Solov'ev, *Physica* **D3**, 483 (1981).
9. *Optical solitons – theory and experiment*, Ed. J. R. Taylor, Cambridge Univ. Press, 1992.
10. V. V. Afanasjev, V. N. Serkin, and V. A. Vysloukh, *Sov. Lightwave Commun.* **2**, 35 (1992).
11. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249 (1974).
12. P. D. Lax, *Comm. Pure. Appl. Math.* **21**, 467 (1968).
13. H. H. Chen and C. S. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 693 (1976).
14. V. N. Serkin and A. Hasegawa, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4502 (2000).
15. V. N. Serkin, A. Hasegawa, *Письма в ЖЭТФ* **72**, 89 (2000).
16. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *Письма в ЖЭТФ* **70**, 573 (1999).
17. В. Н. Серкин, Э. М. Шмидт, Т. Л. Беляева, С. Н. Хотяинцев, *Доклады Академии Наук* **359**, 760 (1998).