

Магнитный катализ нарушения P -четности в массивной модели Гросса – Нэве и высокотемпературная сверхпроводимость

В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко⁺, В. В. Худяков, Д. Эберт*¹⁾

Московский государственный университет, 117234 Москва, Россия

⁺ Институт физики высоких энергий, 142284 Протвино, Московская обл., Россия

* Research Center for Nuclear Physics, Osaka University
Ibaraki, Osaka 567, Japan

* Institut für Physik, Humboldt-Universität zu Berlin, D-10115 Berlin, Germany

Поступила в редакцию 25 декабря 2000 г.

В рамках $(2+1)$ -мерной P -симметричной массивной теории Гросса – Нэве показано, что внешнее магнитное поле индуцирует нарушающий P -четность фазовый переход первого рода. Обсуждается возможность использования результатов работы при описании магнитных фазовых переходов в высокотемпературных сверхпроводниках.

PACS: 05.70.Fh, 11.15.-q

Явление динамического нарушения симметрии, индуцированного внешними (хромо)магнитными полями, носит название эффекта магнитного катализа. Впервые такое свойство внешнего однородного магнитного поля H наблюдалось при исследовании $(2+1)$ -мерной (трехмерной) кирально инвариантной теории поля с четырехфермионным взаимодействием (их еще называют теориями типа Гросса – Нэве (ГН) [1]). Здесь даже при сколь угодно малой константе взаимодействия внешнее магнитное поле, также произвольно малое, приводит к динамическому нарушению киральной симметрии (ДНКС) [2, 3]. Позднее было дано объяснение этому явлению на основе механизма эффективной редукции размерности пространства-времени во внешнем магнитном поле и, соответственно, усилении роли инфракрасных расходимостей в перестройке вакуума [4]. Впоследствии было показано, что ДНКС индуцируется и внешним хромомагнитным полем [5–7]. Кроме того, на основе исследования целого ряда теорий было отмечено, что явление магнитного катализа ДНКС, возможно, имеет модельно независимый характер [8] (для трехмерия этот факт доказан в [4]). В недавней работе [9] в рамках P -четной трехмерной модели ГН показано, что внешнее магнитное поле служит катализатором спонтанного нарушения также и P -четности. Явление магнитного катализа уже использовалось в космологических и астрофизических исследованиях [10],

для построения теории высокотемпературной сверхпроводимости [9, 11–13]. Можно с уверенностью сказать, что в будущем этот эффект найдет применение в физике элементарных частиц, физике конденсированных состояний, физике нейтронных звезд и т.д., то есть в тех разделах науки, где принцип динамического нарушения симметрии играет основополагающую роль, а внешнее магнитное поле является объективной реальностью²⁾.

Значительный интерес, проявленный за последнее десятилетие к изучению трехмерных теорий поля (включая и модели типа ГН [15]), во многом объясняется планарным характером высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), так как электроны проводимости в ВТСП-системах сконцентрированы в плоскостях, образованных атомами Cu и O [16]. В недавнем эксперименте с ВТСП $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [17] обнаружено, что теплопроводность, рассматриваемая как функция внешнего магнитного поля H , претерпевает скачкообразное изменение при некотором значении $H = H_c \sim T^2$ (температура образца $T < T_c$, где T_c – температура перехода в сверхпроводящее состояние). Авторы работы [17] предположили, что при $H = H_c$ происходит фазовый переход, индуцированный внешним магнитным полем. Вскоре было предложено феноменологическое описание (на основе функционала свободной энергии системы) этого фазового перехода как перехода первого рода с наруше-

¹⁾D.Ebert.

²⁾Возможные применения эффекта магнитного катализа обсуждаются также в работах [14].

нием P -четности [18]. Кроме того, представлены и теоретические (микроскопические) объяснения этого явления в рамках двух трехмерных моделей типа ГН на основе эффекта магнитного катализа динамического нарушения симметрии [9, 11]³⁾. В одной из них магнитное поле индуцирует ДНКС [11], в другой — происходит нарушение P -четности [9]. Общей характерной чертой фазовых переходов в обеих моделях является их непрерывность. Иными словами, и киральная симметрия в [11], и P -симметрия в [9] нарушаются в точке $H = H_c$ с помощью фазового перехода второго рода, что не согласуется с феноменологическим подходом работы [18].

В предлагаемой работе показывается, что существует $(2+1)$ -мерная модель ГН, в которой магнитный катализ имеет те же качественные особенности, что и при феноменологическом описании индуцированного внешним магнитным полем фазового перехода в ВТСП-системах [18].

Мы рассматриваем влияние внешнего магнитного поля на фазовую структуру $(2+1)$ -мерной модели ГН вида

$$L = \sum_{a=1}^N (\bar{\psi}_a i \hat{\partial} \psi_a + m \bar{\psi}_a \psi_a) + \frac{G}{2N} \left(\sum_{a=1}^N \bar{\psi}_a \tau \psi_a \right)^2, \quad (1)$$

где $\hat{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, поля ψ_a преобразуются по фундаментальному представлению группы $U(N)$, введенной для того, чтобы использовать в вычислениях непертурбативный метод $1/N$ разложения. Кроме того, для каждого значения $a = 1, 2, \dots, N$ фермиполя ψ_a являются приводимыми относительно группы Лоренца четырехкомпонентными спинорами Дирака (соответствующие индексы опущены); τ — матрица в спинорном пространстве, имеющая вид $\tau = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Действие с лагранжианом (1) инвариантно относительно дискретного преобразования P -четности: $\psi_a(t, x, y) \rightarrow i \gamma^1 \gamma^5 \psi_a(t, -x, y)$ (алгебра γ^μ -матриц для случая приводимого, четырехмерного спинорного представления группы Лоренца преобразований трехмерного пространства приведена в работе [20]). При $m = 0$ именно эта модель использовалась в [9] для описания фазовых переходов, индуцированных внешним магнитным полем в ВТСП-системах.

Мы показываем, что в данной модели при $m \neq 0$, в отличие от случая $m = 0$, внешнее магнитное поле

индуцирует в критической точке $H = H_c$ динамическое нарушение P -четности, которое происходит дискретно, то есть в рамках фазового перехода первого рода. Эта особенность магнитного катализа в модели (1) при $m \neq 0$ предсказываемая нами, не имеет аналогов в других моделях теории поля. Полученные результаты позволяют надеяться на возможность использования массивной модели ГН (1) для теоретического объяснения магнитного фазового перехода в эксперименте [17] в согласии с феноменологическим подходом [18].

1. Фазовая структура модели при $H = 0$.

Прежде чем рассмотреть влияние ненулевого внешнего магнитного поля H на вакуум модели (1), исследуем ее фазовую структуру при $H = 0$. С этой целью введем вспомогательный лагранжиан

$$\tilde{L} = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + m \bar{\psi} \psi + \sigma \bar{\psi} \tau \psi + N \sigma^2 / 2G, \quad (2)$$

где $\sigma(x)$ — вспомогательное бозонное вещественное поле, а индексы a суммирования по вспомогательной группе $U(N)$ здесь и далее подразумеваются. Теории поля (1) и (2) эквивалентны между собой в силу того, что с помощью уравнений движения можно исключить поле σ из (2) и получить лагранжиан (1). Нетрудно показать, что относительно дискретной операции P -четности вспомогательное поле преобразуется следующим образом: $\sigma(t, x, y) \rightarrow -\sigma(t, -x, y)$, то есть σ является псевдоскалярным полем. Исходя из лагранжиана (2), можно найти эффективный потенциал теории, который в однопетлевом приближении (\equiv в главном порядке $1/N$ -разложения) имеет вид

$$V_0(\sigma) = \frac{N \sigma^2}{2G} - N \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + M_k^2), \quad (3)$$

где интегрирование ведется по импульсному пространству Евклида, а $M_{1,2} = |m \pm \sigma|$. Проинтегрируем в (3) по области $0 \leq p^2 \leq \Lambda^2$:

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{|m - \sigma|^3}{6\pi} + \frac{|m + \sigma|^3}{6\pi}, \quad (4)$$

где $1/g = 1/G - 2\Lambda/\pi^2$. Известно, что фазовая структура любой теории поля в значительной степени определяется свойствами симметрии точки глобального минимума ее эффективного потенциала. Нетрудно показать, что функция (4) при $\pi/g > -2m$ имеет симметричную относительно преобразования P -четности точку глобального минимума $\sigma = 0$. Если $\pi/g < -2m$, то у потенциала (4) на множестве

³⁾ В недавних работах [19] обсуждалась возможность описания этого фазового перехода и в рамках других релятивистских трехмерных теорий.

$0 \leq \sigma < \infty$ появляется отличная от нуля точка абсолютного минимума

$$\sigma_0 = -\frac{\pi}{2g} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4g^2} - m^2}, \quad (5)$$

и P -симметрия модели спонтанно нарушается. Используя вместо g голую константу связи G , можно получить следующую картину. При $G < G_c = \pi^2/(2\Lambda - 2m\pi)$ вакуум модели P -четен, при $G > G_c$ реализуется фаза модели со спонтанным нарушением P -симметрии. В точке $G = G_c$, поскольку глобальный минимум потенциала скачком переходит из начала координат в ненулевую точку (5), происходит фазовый переход первого рода. (Для сравнения отметим, что в случае безмассовой модели, то есть при $m = 0$, в точке $G = G_c$ происходит непрерывный по константе связи фазовый переход второго рода.)

2. Магнитный катализ динамического нарушения P -четности. Рассмотрим теперь, как действует внешнее магнитное поле H (температура равна нулю) на симметричную фазу модели (1), то есть в случае $\pi/g > -2m$ (при этом голая константа связи достаточно мала: $G < G_c$). Соответствующий эффективный потенциал, являющийся частным случаем эффективного потенциала для более общей модели ГН при $H \neq 0$ [20], имеет следующий вид:

$$V_H(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + N \sum_{k=1}^2 \left[\frac{eHM_k}{4\pi} - \frac{(2eH)^{3/2}}{4\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M_k^2}{2eH}\right) \right] \quad (6)$$

где $\zeta(s, x)$ – обобщенная дзета-функция Римана [21]. Покажем, что внешнее магнитное поле индуцирует спонтанное нарушение P -четности модели (явление магнитного катализа), причем характер этого явления качественно различен в случаях $m = 0$ и $m \neq 0$.

Случай $m = 0$. Соответствующий эффективный потенциал модели $V_H^{m=0}(\sigma)$ получается из формулы (6) при $m = 0$:

$$V_H^{m=0}(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + \frac{NeH|\sigma|}{2\pi} - \frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right). \quad (7)$$

Ясно, что $V_H^{m=0}(\sigma)$ есть симметричная относительно преобразования $\sigma \rightarrow -\sigma$ функция. Следовательно, для нахождения точки глобального минимума доста-

точно исследовать ее только на множестве $\sigma \in [0, \infty)$. В этом случае уравнение стационарности

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_H^{m=0}(\sigma)}{\partial \sigma} &\equiv 2N\sigma F(\sigma) = \\ &= 2N\sigma \left[\frac{1}{2g} + \frac{eH}{4\pi\sigma} - \frac{\sqrt{2eH}}{4\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

получается из (7) с помощью формулы $d\zeta(s, x)/dx = -s\zeta(s+1, x)$. Исследование потенциала (7) проводилось в работах [2, 4, 6]. Несмотря на это, мы более подробно остановимся на некоторых деталях, необходимых для дальнейшего.

Прежде всего отметим, что из (8) следует

$$\left. \frac{\partial V_H^{m=0}(\sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow 0+} = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} (2N\sigma F(\sigma)) = -\frac{NeH}{2\pi}, \quad (9)$$

то есть точка $\sigma = 0$ не является решением уравнения стационарности (8). Кроме того, поскольку $V_H^{m=0}(\sigma) = V_H^{m=0}(-\sigma)$, имеются еще два следствия формулы (9): 1) в точке $\sigma = 0$ находится локальный максимум потенциала; 2) первая производная функции $V_H^{m=0}(\sigma)$ не существует в точке $\sigma = 0$. (В то же время при $H = 0$ эффективный потенциал – дифференцируемая на всей оси σ функция.) Следствие 1), а также тот факт, что $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V_H^{m=0}(\sigma) = +\infty$, говорят о наличии отличной от нуля точки глобального минимума $\sigma_0(H)$ потенциала $V_H^{m=0}(\sigma)$. Это означает, что P -симметрия рассматриваемой безмассовой модели в присутствии внешнего магнитного поля (сколь угодно малого) обязательно спонтанно нарушена даже при сколь угодно малой константе взаимодействия G (при этом $g > 0$). Таким образом, происходит динамическое нарушение P -четности, индуцированное внешним магнитным полем (явление магнитного катализа).

Известно, что функция $F(\sigma)$ монотонно возрастает на множестве $\sigma \in [0, \infty)$, так что $F(0) = -\infty$ (следствие равенства (9)) и $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(\sigma) = \infty$ [2, 6]. Поэтому существует единственная точка $\sigma_0(H)$, в которой функция $F(\sigma)$ обращается в нуль, где и находится глобальный минимум потенциала (7). Из уравнения $F(\sigma) = 0$ как равенства, неявно задающего функцию $\sigma_0(H)$, следует, что $\sigma_0(H) \approx egH/(2\pi)$ при $H \rightarrow 0$ [2, 6].

Таким образом, при включении магнитного поля в модели происходит нарушающий P -четность непрерывный по H фазовый переход второго рода в силу того, что параметр порядка $\sigma_0(H)$ в точке фазового перехода (то есть при $H = 0$) является непрерывной функцией переменной H .

Ранее доказано [2, 6], что $\sigma_0(H)$ при больших значениях H имеет следующее поведение: $\sigma_0(H) \approx k\sqrt{eH}$, где k – решение уравнения $1 = \sqrt{2}\zeta(1/2, k^2/2)$ и $k \approx 0.45$. Так как $\sigma_0(H)$ – точка глобального минимума потенциала (7), то для всех значений H справедливо неравенство: $V_H^{m=0}(0) > V_H^{m=0}(\sigma_0(H))$. В частности, используя это соотношение при $H \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) > \\ & > \frac{Nk(eH)^{3/2}}{2\pi} - \frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{k^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Случай $m \neq 0$. Остановимся теперь на некоторых особенностях спонтанного нарушения симметрии в модели (1) при $H, m \neq 0$. Как и в безмассовом случае, при $m \neq 0$ потенциал $V_H(\sigma)$ – четная функция переменной σ , поэтому достаточно провести его исследование на полуоси $\sigma \in [0, \infty)$. Здесь уравнение стационарности для эффективного потенциала имеет вид

$$0 = \frac{1}{N} \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} =$$

$$\begin{cases} (\sigma+m)F(\sigma+m) - (m-\sigma)F(m-\sigma) & \text{при } \sigma < m; \\ (\sigma+m)F(\sigma+m) + (\sigma-m)F(\sigma-m) & \text{при } \sigma > m, \end{cases} \quad (11)$$

где функция $F(x)$ представлена в (8). С учетом (9) отсюда нетрудно получить

$$\left. \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow m_+} = -\frac{NeH}{2\pi} + \left. \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow m_-}, \quad (12)$$

что при $H \neq 0$ означает недифференцируемость потенциала (6) в точках $\sigma = \pm m$. В силу этого, точкой глобального минимума функции $V_H(\sigma)$ на множестве $\sigma \in [0, \infty)$ может быть либо точка $\sigma = m$, либо одно из решений уравнения стационарности (11). Однако, используя (12), можно сделать важный вывод: если в некоторой окрестности слева от точки $\sigma = m$ эффективный потенциал имеет отрицательную производную, то и в некоторой окрестности справа от нее производная также отрицательна. Значит, $\sigma = m$ не может быть точкой не только глобального, но даже и локального минимума. Поэтому особое внимание нужно уделить решениям уравнения (11).

Очевидным решением этого уравнения для всех H является точка $\sigma = 0$. С помощью аналитических и численных методов можно показать, что при всех $H \neq 0$ в этой точке находится, по крайней мере, локальный минимум функции $V_H(\sigma)$. Более того, при

достаточно малых значениях H глобальный минимум потенциала располагается именно в точке $\sigma = 0$, а P -четность остается ненарушенной (это следствие того, что при таких H производная потенциала положительна для всех $\sigma \in [0, \infty)$).

Покажем, что при больших H уравнение (11) имеет еще одно решение, которое отсутствует при малых H . Действительно, в области $\sigma \gg m$ это уравнение совпадает по своему виду с уравнением стационарности (8) для безмассового случая. Решение $\sigma_0(H)$ последнего становится большой величиной только в пределе $eH \rightarrow \infty$. Следовательно, в области больших значений магнитного поля уравнение (11) имеет, кроме $\sigma = 0$, еще одно решение $\tilde{\sigma}_0(H)$ такое, что $\tilde{\sigma}_0(H) \approx k\sqrt{eH}$ при $eH \rightarrow \infty$ (значение коэффициента k то же, что и в формуле (10)). Других решений уравнения стационарности (11), кроме $\sigma = 0$ и $\tilde{\sigma}_0(H)$, нам не удалось обнаружить.

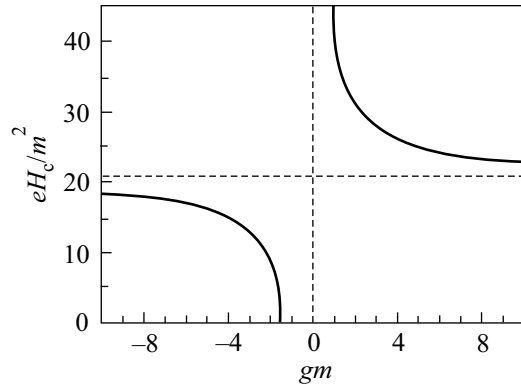


Рис.1. Критическое магнитное поле в зависимости от константы связи g

Как было сказано выше, при достаточно малых H глобальный минимум потенциала находится в точке $\sigma = 0$. Покажем, что с ростом H он переходит в точку $\tilde{\sigma}_0(H)$. С этой целью найдем значения потенциала в стационарных точках при $eH/m^2 \rightarrow \infty$:

$$V_H(0) = -\frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) + O(eH/m^2), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_H(\tilde{\sigma}_0(H)) &= \frac{k(2eH)^{3/2}}{2\pi} - \\ &- \frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{k^2}{2}\right) + O(eH/m^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где мы учли, что $\tilde{\sigma}_0(H) \approx k\sqrt{eH}$ при $eH \rightarrow \infty$. Сравнивая с помощью (10) между собой выражения (13) и (14), приходим к выводу, что $V_H(\tilde{\sigma}_0(H)) < V_H(0)$

Значения $H_c(T)$ при $gt = 5$

T/m	0.1	0.25	0.5	1	2.5	5	10	25	50	100	200
$eH_c(T)/m^2$	24.9	25.2	27	36	131	465	1782	10900	43200	173000	700000

при $eH \rightarrow \infty$. Поскольку $\sigma = 0$ для всех значений H является, по крайней мере, локальным минимумом, то переход глобального минимума потенциала из точки $\sigma = 0$ в нетривиальную точку $\tilde{\sigma}_0(H)$ происходит скачкообразно при некотором критическом значении внешнего магнитного поля $H_c(g) \neq 0$. Таким образом, в точке $H_c(g)$ происходит нарушающий P -четность фазовый переход первого рода. Зависимость критического магнитного поля $H_c(g)$ от константы g при $T = 0$ и $m \neq 0$ приведена на рис.1. На рис.2 приведены графики функции $V_H(\sigma)$ при различных значениях H и $gt = 10$.

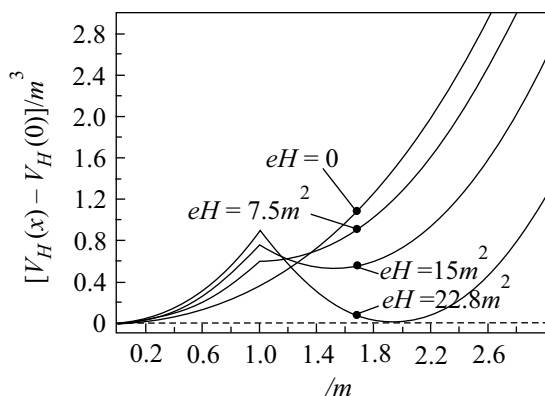


Рис.2. Эффективный потенциал при различных значениях магнитного поля и $gt = 10$

3. Магнитный катализ при ненулевой температуре T . Используя технику, развитую в [4], можно получить следующее выражение для эффективного потенциала модели (1) при $H, T \neq 0$:

$$\frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) = \frac{1}{N} V_H(\sigma) - \frac{eH}{2\pi\beta} \sum_{i=1}^2 \{ \ln(1 + \exp(-M_i\beta)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \exp(-\beta \sqrt{M_i^2 + 2keH})) \}, \quad (15)$$

где $\beta = 1/T$, а $V_H(\sigma)$ – потенциал (6). Численный анализ потенциала (15) показывает, что в этом случае также при достаточно малых H четность не нарушена. Однако существует критическое магнитное поле, при котором наступает нарушающий P -четность фазовый переход первого рода. При фиксированном значении g обозначим величину критического поля

как $H_c(T)$. Некоторые ее значения при $gt = 5$ приведены в таблице. Из данных этой таблицы видно, что $H_c(T) \sim T^2$ при $T \rightarrow \infty$, то есть $H_c(T)$ ведет себя так же, как и в моделях [9, 11].

В предлагаемой работе в рамках теории поля доказано, что внешнее магнитное поле может индуцировать фазовый переход первого рода⁴). В качестве примера мы предложили P -инвариантную массивную трехмерную модель ГН (1). При $m = 0$ в этой модели имеет место магнитный катализ динамического нарушения P -симметрии [9]. Причем, в точке $H_c \sim T^2$ ($T \rightarrow \infty$) происходит фазовый переход второго рода, а теоретические значения H_c хорошо описывают данные эксперимента [17].

Мы показали, что при $m \neq 0$ в модели (1) внешним магнитным полем также индуцируется динамическое нарушение P -четности. Поведение кривой H_c при больших T такое же, как и при $m = 0$. Однако в отличие от последнего случая, в массивной модели ГН (1) в точке H_c происходит нарушающий P -четность фазовый переход первого рода, что согласуется с феноменологическим описанием [18] магнитных фазовых переходов в ВТСП-системах из эксперимента [17].

Д. Э. признателен Министерству образования Японии за поддержку его работы в RCNP университета Осаки. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по теме # 98-02-16690, а также Немецкого исследовательского общества (DFG-Project 436 RUS 113/477/4). Авторы также благодарят S.Sachdev'a за указание на недавние работы из [19], в которых приводится микроскопический вывод уравнения типа Гросса–Нэве для описания ВТСП и обсуждается его связь с недавними экспериментами.

1. D. J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).
2. К. Г. Клименко, ТМФ **89**, 211 (1991); ТМФ **90**, 3 (1992); К. G. Klimenko, Z. Phys. **C54**, 323 (1992).
3. I. V. Krive and S. A. Naftulin, Phys. Rev. **D46**, 2737 (1992).

⁴) Численный анализ, проведенный недавно в кирально инвариантной модели КЭД₃, также указывает на возможность магнитного катализа ДНКС в рамках фазового перехода первого рода [13].

4. V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3499 (1994); *Phys. Rev.* **D52**, 4718 (1995).
5. K. G. Klimenko, A. S. Vshivtsev, and B. V. Magnitsky, *Nuovo Cim.* **A107**, 439 (1994); А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, *ТМФ* **101**, 391 (1994); *ЯФ* **57**, 2260 (1994).
6. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, *ЭЧАЯ* **29**, 1259 (1998).
7. I. A. Shovkovy and V. M. Turkowski, *Phys. Lett.* **B367**, 213 (1995); D. Ebert and V. Ch. Zhukovsky, *Mod. Phys. Lett.* **A12**, 2567 (1997); V. P. Gusynin, D. K. Hong, and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev.* **D57**, 5230 (1998).
8. G. W. Semenoff, I. A. Shovkovy, and L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D60**, 105024 (2000).
9. W. V. Liu, *Nucl. Phys.* **B556**, 563 (1999).
10. T. Inagaki, T. Muta, and S. D. Odintsov, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **127**, 93 (1997); E. J. Ferrer and V. de la Incera, *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, 3963 (1999); hep-th/9910035.
11. G. V. Semenoff, I. A. Shovkovy, and L. C. R. Wijewardhana, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 1143 (1998).
12. K. Farakos and N. E. Mavromatos, *Int. J. Mod. Phys.* **B12**, 809 (1998); K. Farakos, G. Koutsoumbas, and N. E. Mavromatos, *Int. J. Mod. Phys.* **B12**, 2475 (1998); N. E. Mavromatos and A. Momen, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 1765 (1998).
13. J. Alexandre, K. Farakos, and G. Koutsoumbas, hep-th/0010211.
14. V. A. Miransky, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **123**, 49 (1996); V. P. Gusynin, *Ukrainian J. Phys.* **45**, N4, 5, 603 (2000); V. de la Incera, hep-ph/0009303.
15. G. W. Semenoff and L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2633 (1989); R. Mackenzie, P. K. Panigrahi, and S. Sakhi, *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 3603 (1994); V. P. Gusynin, V. M. Loktev, and I. A. Shovkovy, *JETP* **80**, 1111 (1995); E. Babaev, *Phys. Lett.* **B497**, 323 (2001); hep-th/9909052.
16. A. S. Davydov, *Phys. Rep.* **190**, 191 (1990).
17. K. Krishana, N. P. Ong, Q. Li et al., *Science* **277**, 83 (1997).
18. R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5188 (1998).
19. M. R. Li, P. J. Hirschfeld, and P. Wolfe, cond-mat/0003160; M. Vojta, Y. Zhang, and S. Sachdev, cond-mat/0003163; cond-mat/0008048; *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4840 (2000); D. V. Khveshchenko and J. Paaske, cond-mat/0009117.
20. В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, В. В. Худяков, *ТМФ* **124**, 323 (2000).
21. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. 2, М.: Изд. АН СССР, 1963.