

Турбулентный перенос в плазме как диффузионный процесс со случайным временем

Г. М. Батанов, В. Е. Бенинг*, В. Ю. Королев*, А. Е. Петров, К. А. Сарксян, Н. Н. Скворцова¹⁾, Н. К. Харчев,

С. В. Щепетов

Институт общей физики РАН, 117942 Москва, Россия

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 октября 2000 г.

После переработки 25 декабря 2000 г.

При анализе вероятностных характеристик процессов турбулентного переноса в плазме предлагается использовать статистический анализ приращений флуктуационного потока частиц. Такой подход позволяет осуществить переход к анализу динамических вероятностных характеристик исследуемого процесса. Показано, что в плазме стелларатора J-2M и линейной установки ТАУ-1 приращения локального флуктуационного потока частиц имеют стохастический характер, а их распределения являются масштабными смесями гауссовых законов. В частности, для ТАУ-1 приращения имеют распределение Лапласа (являющееся масштабной смесью гауссовых законов при экспоненциальном смешивающем распределении). Это означает, что скорость изменения потока является диффузионным процессом со случайным временем. Показано, что характерное время роста и спада флуктуаций на порядок величины меньше характерного времени (времени корреляций) флуктуаций. Обсуждаются возможные механизмы, которые могут определять случайный характер роста и спада флуктуаций.

PACS: 52.35.Ra

1. В последние годы пристальное внимание уделяется изучению вероятностных характеристик турбулентного переноса в плазме и, в частности, анализу флуктуационного локального потока частиц в магнитоактивной плазме, формируемой как в тороидальных, так и в линейных установках [1–3]. Однако, как правило, авторы ограничиваются расчетом и описанием характеристик функции плотности вероятности турбулентного потока частиц (Probability Density Function – PDF), констатируя негауссов характер распределения. Более того, используемые математические построения не всегда достаточно корректны. Например, заключение об отклонении PDF от гауссовой (в частности, ее большей островершинности) делается по виду гистограммы, построенной по значениям локального флуктуационного потока частиц в равноотстоящие моменты времени. Но, как легко показать, даже для дискретного временного ряда, построенного для процесса классического броуновского движения, такой подход всегда дает значение коэффициента эксцесса около $M_4 \sim 4$ (тогда как для гауссова закона $M_4 = 3$). Поэтому по большей (нежели у гауссова закона) островершинности получаемого распределения, вообще говоря, нельзя сделать категоричный вывод о негауссовости исходного

процесса. Практически до последнего времени не делалось попыток обсудить механизмы, приводящие к особенностям PDF флуктуационного потока частиц в плазме. И лишь недавно [4, 5] были предприняты попытки связать статистически-вероятностные характеристики флуктуационных потоков с развивающимися в плазме нелинейными волновыми процессами.

В настоящей работе к решению указанной выше задачи предлагается применить подход, известный в математической статистике (прежде всего, в анализе временных рядов), но ранее не использовавшийся в физике плазмы. А именно, предлагается осуществить переход от статистического анализа амплитуд флуктуационного потока частиц к анализу и моделированию его приращений (по сути первой производной по времени). Дело в том, что значения исходного процесса в равноотстоящие моменты времени не являются однородной независимой выборкой, а потому по ним крайне затруднительно делать выводы о вероятностно-статистических свойствах изучаемого процесса. В то же время, как показывает статистический анализ приращений такого процесса на непесекающихся интервалах времени одинаковой длины, их распределения одинаковы. Поэтому, изучая приращения процесса, можно выявить динамические характеристики флуктуационного потока и их связь с теми или иными физическими механизмами.

¹⁾e-mail: nina@fpl.gpi.ru

2. Авторами настоящей работы проводилось исследование вероятностных характеристик флуктуационных потоков частиц, измеренных в плазме стелларатора Л-2М и модельной установки ТАУ-1. Параметры этих установок и плазмы приведены в [6, 7]. Основные отличия — это тороидальность магнитного поля в Л-2М и однородность его в ТАУ-1, а также высокая температура плазмы в Л-2М (температура электронов $T_e = 0.6 \div 1.0$ кэВ), и низкая в ТАУ-1 ($T_e = 5 \div 7$ эВ). В то же время, отметим общность спектральных и статистических характеристик турбулентности плазмы на обеих установках, обнаруженную ранее в [8].

Обратимся к вероятностным характеристикам локального флуктуационного потока частиц, полученных в результате обработки экспериментальных данных. Но прежде определим локальный флуктуационный поток частиц как $\tilde{\Gamma} = (\delta n_e \cdot \delta v_r)$ [2, 3], где δn_e — флуктуации плотности плазмы, $\delta v_r = \delta E_\Theta / B$ — флуктуации радиальной скорости ($\delta E_\Theta = (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) / \Delta\Theta r$ — флуктуации полоидального электрического поля, $\delta\varphi$ — флуктуации плавающего потенциала плазмы, Θ — полоидальная угловая координата). Что касается типа неустойчивостей, то для плазмы ТАУ-1 это дрейфово-диссипативная неустойчивость [7], для Л-2М — неустойчивость резистивно-баллонных мод в краевой плазме [3] и дрейфово-диссипативная в более глубоких слоях [6]. Частоты турбулентных спектров колебаний лежат в интервале значений от нескольких килогерц до сотни килогерц для ТАУ-1, и до нескольких сотен килогерц для Л-2М, спектр Л-2М значительно шире ($\Delta f/f|_{\text{Л-2М}} \approx 1$, $\Delta f/f|_{\text{ТАУ-1}} \approx 0.3$).

На рис.1 в качестве иллюстрации приводятся временные реализации флуктуационного потока $\tilde{\Gamma}$ (рис.1а) и его приращений $\Delta\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_j(t_j) - \tilde{\Gamma}_{j-1}(t_{j-1})$ (рис.1б) для плазмы Л-2М. Как видно, оба сигнала имеют вспышечный перемежаемый вид, что говорит о случайном характере обоих процессов. На рис.1с приведены автокорреляционные (АКФ) функции потока и приращений потока для тех же сигналов. Видно, что в пределах временной реализации процесса АКФ $\tilde{\Gamma}$ не выходит на уровень шума, а АКФ $\Delta\tilde{\Gamma}$ выходит на уровень шума за несколько микросекунд. Медленное изменение АКФ $\tilde{\Gamma}$ показывает, что временная реализация величин потока не являются однородной независимой выборкой, АКФ $\Delta\tilde{\Gamma}$ указывает на случайность временной реализации приращений и их независимости (см. п.1). Отсюда следует, что для традиционных методов вероятностного анализа корректнее использование величин

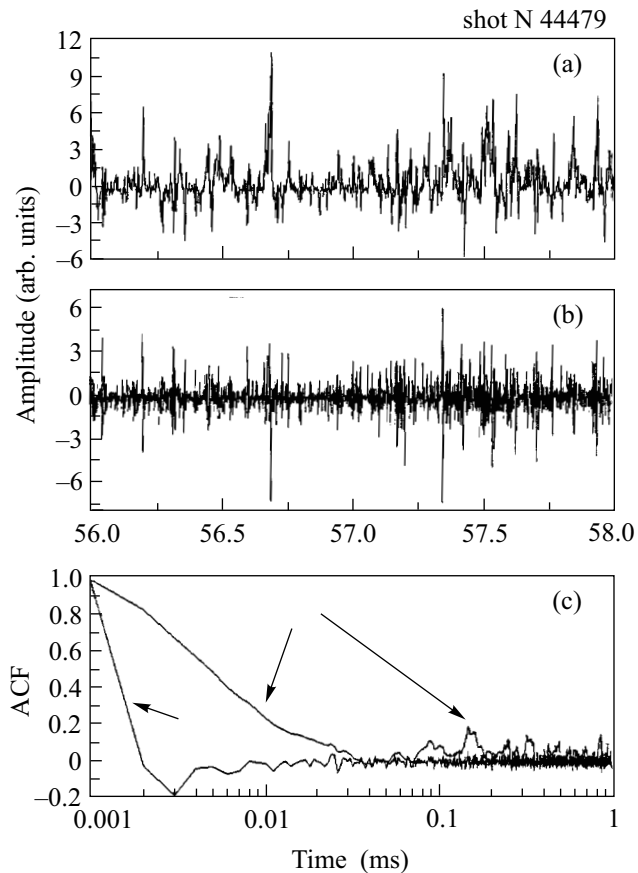


Рис.1. Временная реализация сигналов для локального флуктуационного потока частиц $\tilde{\Gamma}$ (а) и его приращений $\Delta\tilde{\Gamma}$ (б); автокорреляционные функции (ACF) $\tilde{\Gamma}$ и $\Delta\tilde{\Gamma}$ (с); установка Л-2М. Частота оцифровки сигналов 1 МГц

приращений флуктуационных потоков, а не величин амплитуд этих потоков.

На рис.2 представлены PDF процесса локального флуктуационного потока частиц и его приращений. На графиках приведены значения коэффициентов асимметрии M_3 и эксцесса M_4 соответствующих PDF. Для PDF процесса $\tilde{\Gamma}$ (рис.2а и 2б) характерно заметное отклонение от закона Гаусса при значительной асимметрии распределения, что вполне согласуется со сказанным в п.1. Значительно интереснее отклонение от гауссовых PDF значений $\Delta\tilde{\Gamma}$ при симметрии самих PDF. Последнее обстоятельство показывает, что мы имеем дело с однородным во времени процессом в открытых системах. И в данном случае мы можем говорить о стационаре в динамическом процессе роста и спада флуктуационного потока. Аналогичную картину мы имеем и для PDF приращений флуктуаций плавающего потенциала и ионного тока насыщения ленгмюровских зондов как для дрейфовых колебаний на ТАУ-1, так и для МГД ко-

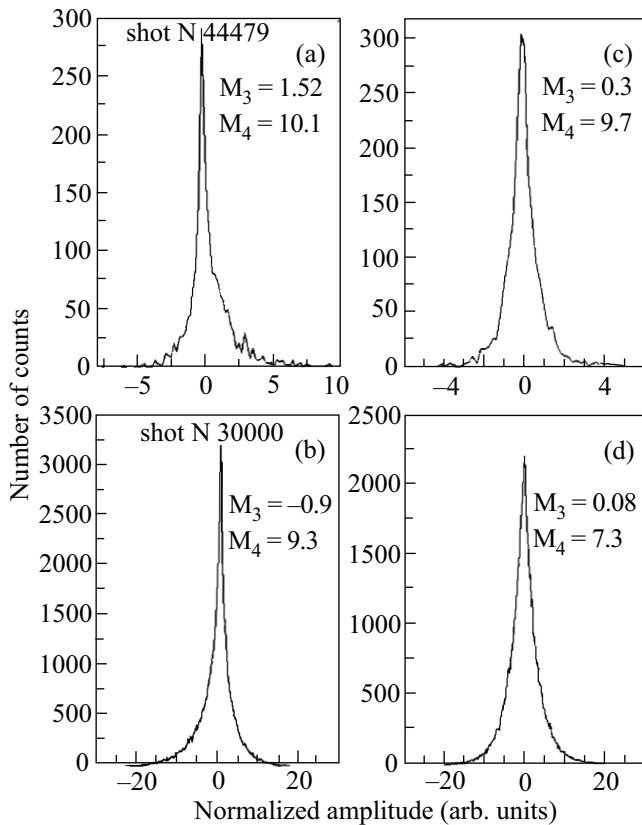


Рис.2. Функция распределения плотности вероятности (PDF) для локального флуктуационного потока частиц $\tilde{\Gamma}$ и его приращений $\Delta\tilde{\Gamma}$: (a) PDF для $\tilde{\Gamma}$ – Л-2М, (b) PDF для $\tilde{\Gamma}$ – ТАУ-1, (c) PDF для $\Delta\tilde{\Gamma}$ – Л-2М, (d) PDF для $\Delta\tilde{\Gamma}$ – ТАУ-1

лебаний на Л-2М. Более того, PDF приращений сигнала излучения, рассеянного на флуктуациях плотности в центральных областях плазмы Л-2М, также оказывается симметричной, а АКФ для приращений затухает с той же постоянной, что и для приращений флуктуаций потенциала и флуктуаций концентрации. Естественно, что плазма в обеих установках является открытой системой, динамическое равновесие по макропараметрам в которой существенно превышает времена (периоды) флуктуаций.

Как видно из данных рис.2, коэффициенты экспоненты для PDF процесса $\Delta\tilde{\Gamma}$ равны $M_4 \approx 9$ в Л-2М и $M_4 \approx 7$ в ТАУ-1. Последний случай представляет наибольший интерес, поскольку соответствующая гистограмма с очень большой надежностью согласуется с плотностью вероятности распределения Лапласа, тогда как PDF приращений плавающего потенциала и ионного тока насыщения гауссовы. Распределение Лапласа является одним из важных частных случаев устойчивых распределений диффузионных процессов со случайным временем (дважды сто-

хастических диффузионных процессов). Такие процессы возникают в результате предельного перехода в обобщенных процессах Кокса²⁾ [9]. В этом случае функция распределения вероятности Лапласа (с точностью до параметра масштаба) может быть представлена в виде масштабной смеси гауссовых законов, где в качестве смешивающего распределения выступает экспоненциальное. А именно, если $L(x)$ – функция распределения Лапласа:

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{2}|x|} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (1)$$

а $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad (2)$$

тогда

$$L(x) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}\right) e^{-\sigma} d\sigma, \quad x \in R \quad (3)$$

(см., например, [9]). Отсюда можно сделать вывод о том, что каждое приращение $\Delta\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_j - \tilde{\Gamma}_{j-1}$ является результатом классической (броуновской) диффузии из точки $\tilde{\Gamma}_{j-1}$ в точку $\tilde{\Gamma}_j$, но со своим коэффициентом диффузии σ_j , что означает изменение флуктуационного потока во времени по диффузионному закону. При этом с изменением j коэффициент σ_j изменяется случайным образом, то есть коэффициенты диффузии $\sigma_j (j \geq 1)$ – случайные величины, причем с экспоненциальным распределением (см. (1)–(3)).

Другим доказательством правомерности описания флуктуационного потока как диффузионного процесса со случайным временем является изменение PDF приращений дрейфового потока для ТАУ-1 при увеличении длины временного интервала между моментами оцифровки. Распределение Лапласа сохраняется при увеличении интервала между оцифровками от 1 до 5 мкс. Дальнейшее увеличение интервала между моментами оцифровки до 100 мкс ведет к приближению PDF к распределению Гаусса (рис.3). Такой переход соответствует асимптотике обобщенных процессов Кокса [9].

²⁾ Дважды стохастический пуассоновский процесс $N^{(k)}(t) = N_l(\Lambda_k(t))$, где N_l – однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью и Λ_k – независимые от N_l случайные процессы. Также в [9] приведены доводы в пользу использования обобщенных процессов Кокса в качестве математических моделей неоднородных хаотических физических процессов.

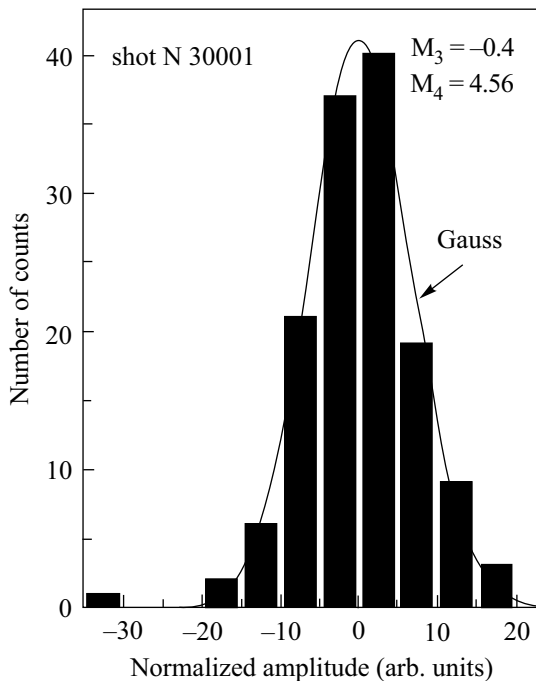


Рис.3. Гистограмма приращений локального флуктуационного потока частиц при частоте оцифровки 10 кГц. ТАУ-1

Таким образом, мы приходим к заключению, что динамические характеристики флуктуационного потока (скорости роста и спада) являются случайными величинами, распределенными в случае ТАУ-1 по Лапласу, а в случае Л-2М по более сложному закону, отличающемуся от распределения Гаусса, то есть вероятность появления больших (выходящих за пределы 3 среднеквадратичных отклонений³⁾) приращений потока во много раз больше, чем если бы приращения были распределены по Гауссу. Иными словами, в эксперименте возрастает вероятность появления “сверхбыстрых” приращений потока. Плотности распределения вероятности диффузионных процессов со случайным временем всегда имеют более тяжелые хвосты и более острую вершину, нежели само распределение Гаусса [10], PDF флуктуационных потоков на многих (а не только представленных в этой статье) установках имеет подобную форму.

3. Попытаемся теперь выяснить, какие физические механизмы могут приводить к случайному характеру таких динамических характеристик, как скорость роста и спада флуктуационного потока частиц. Не претендуя на всеобъемлющий анализ в рамках настоящей статьи, мы постараемся обозначить лишь некоторые физические механизмы, роль кото-

рых в формировании процесса случайных приращений в той или иной степени подтверждается экспериментальными данными. К случайному характеру динамического параметра турбулентных пульсаций могут приводить нелинейные процессы ограничения роста неустойчивых колебаний. Так в случае пучковой или параметрической неустойчивости таким процессом, по-видимому, может быть коллапс ленгмюровских волн. В случае дрейфово-диссипативной неустойчивости ограничение роста может возникать из-за стохастического нагрева ионов и усиления из-за этого нагрева диффузии плазмы, как это имело место в [7].

Другим механизмом, приводящим к случайному характеру процесса приращений потока $\Delta\bar{\Gamma}$, может быть возникновение нелинейных структур в исследуемой турбулентной плазме как на Л-2М (вихри, широкие радиальные МГД структуры), так и на ТАУ-1 (вихри, солитоны) [3, 11] и взаимодействие этих структур. Ранее в экспериментах были измерены характерные времена турбулентности, связанные с образованием, нелинейным взаимодействием и затуханием таких структур, поэтому учет нелинейных структур может существенно изменить структуру $\Delta\bar{\Gamma}$.

Метод анализа приращений помогает выделить характерные времена развития нелинейных структур. В этом плане чрезвычайно важна возможность определения характерного динамического времени процесса по АКФ приращений флуктуаций. Так, как это видно из рис.1 для $\Delta\bar{\Gamma}$, в краевой плазме Л-2М это время около 1 мкс. Анализ АКФ приращений флуктуаций плавающего потенциала и ионного тока насыщения дает величину в 2 мкс. Такое же значение имеет и характерное время приращений микроволнового излучения гиротрона, рассеянного в центральных областях плазменного шнура. Поскольку в последнем случае мы имеем усреднение по значительному объему в центре плазменного шнура, то можно сказать, что “динамическое” время является характерным временем развития и исчезновения нелинейных структур.

Аналогичные результаты мы имеем для характерного времени для приращений потока, флуктуаций плавающего потенциала и ионного тока насыщения ленгмюровских зондов для дрейфовой неустойчивости в плазме ТАУ-1.

Как в первом, так и во втором случаях обращает на себя внимание тот факт, что “динамическое” время примерно на порядок меньше характерного времени флуктуаций (времени корреляции), то есть возникновение и исчезновение нелинейной структуры

³⁾ В теории вероятности это “правило 3-х сигма”.

происходит по неадиабатическому закону (носит характер “сбоя фазы” в движениях частиц). Отсюда можно, по-видимому, сделать заключение, что “динамическое” время совместно с характерным пространственным масштабом нелинейной структуры определяет скорость флуктуационного переноса плазмы поперек магнитного поля. Так, принимая, согласно [6], характерный масштаб флуктуаций в Л-2М 0.2–1 см и “динамическое” время 1–2 мкс, получаем скорость переноса $1 - 5 \cdot 10^5$ см/с в согласии с зондовыми измерениями в краевой плазме [3].

4. Коротко подведем итоги:

а) корректный статистический анализ флуктуационных характеристик на основе равноотстоящей выборки временных приращений амплитуд флуктуаций дает возможность определить характерное “динамическое” время процесса турбулентного переноса в плазме Л-2М и ТАУ-1; и в обоих случаях оказывается на порядок меньше характерного времени флуктуаций;

б) показано, что приращение процесса является случайной величиной, а PDF для приращений флуктуационных потоков не описывается распределением Гаусса; в случае дрейфовой турбулентности в ТАУ-1 PDF описывается распределением Лапласа, а в случае МГД турбулентности более сложным распределением;

в) указано на такие нелинейные процессы ограничения роста неустойчивых колебаний, как коллапс ленгмюровских волн и стохастический нагрев частиц, а также на процессы образования нелинейных структур, как на возможные физические механизмы, которые могут определять случайный характер

временных параметров флуктуационного переноса в плазме.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 00-02-17507) и “Федеральной программы ведущих научных школ” (проект # 00-15-96676).

1. J. W. Connor, P. Burraffi, J. G. Cordey et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41**, 693 (1999).
2. M. A. Pedrosa, M. A. Ochando, J. A. Jimenez et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **38**, 365 (1996).
3. G. M. Batanov, O. I. Fedyanin, N. K. Kharchev et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 1241 (1998).
4. B. A. Carreras, B. van Milligen, C. Hidalgo et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3653 (1999).
5. G. M. Zaslavsky, M. Edelman, H. Weiltzner et al., *Plasma Physics* **7**, 3691 (2000).
6. Г. М. Батанов, К. М. Ликин, К. А. Сарксян, М. Г. Шац, *Физика плазмы* **7**, 1199 (1993).
7. Ф. Ф. Асадуллин, Г. М. Батанов, Л. В. Колик и др., *Физика плазмы* **7**, 414 (1981).
8. G. M. Batanov, K. A. Sarkisian, A. V. Sapozhnikov et al., *IV Intern. Conf. on Nonlinear and Turbulent Proc. in Phys.*, Kiev, v.1, 1989, p.231.
9. B. V. Gnedenko and V. Yu. Korolev, *Random Summation: Limit Theorems and Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
10. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, Москва, 1962, с.321.
11. А. Е. Петров, К. А. Сарксян, Н. Н. Скворцова, Н. К. Харчев, *Физика плазмы* **27**, вып.1 (2001) (в печати).