Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 4, с. 177 – 181

Вейлевская аномалия в двумерной супергравитации

Д. Р. Караханян[1)]

Ереванский физический институт АН Армении, 375036 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 30 июля 1999 г.

После переработки 22 января 2001 г.

Двумерная теория супергравитации проанализирована с точки зрения когомологий группы Вейля. Построено ковариантное нелокальное выражение для эффективного действия. Его основная нелокальная часть, как и в случае обычной гравитации, определяется известным действием Полякова $R\frac{1}{\Box}R$.

PACS: 04.65.+e, 11.25.Hf

1. В последние два десятилетия двумерные теоретико-полевые модели были исследованы широко и всесторонне. Помимо прямого применения в некоторых областях физики, эти модели являются прекрасной, а зачастую и единственной на сегодняшний день возможностью исследования реалистичных, но несравненно более сложных четырехмерных моделей. Действительно, такие явления, как асимптотическая свобода, размерная трансмутация и другие, возникают также и в контексте двумерных интегрируемых теорий и могут быть описаны точно. Их исследование дает надежду на построение соответствующих четырехмерных механизмов. Наконец, исследуя двумерные модели, можно получить некоторую информацию о структуре четырехмерных теорий. С этой точки зрения, двумерная гравитация является наиболее интересной двумерной теорией.

Хорошо известно, что действие Эйнштейна – Гильберта в двух измерениях оказывается топологическим инвариантом, пропорциональным эйлеровской характеристике двумерного многообразия. Поскольку стандартный гравитационный лагранжиан локально оказывается тривиальным (пропорциональным полной производной в пределах любой координатной окрестности на многообразии), то уместно вспомнить о гипотезе Сахарова о том, что классический гравитационный лагранжиан должен быть взят тождественно равным нулю, а истинный лагранжиан индуцируется квантовыми флуктуациями гравитирующих полей материи. Именно к исследованию этой теории свелась проблема некритических струн после знаменитой работы Полякова [1], который затем связал [2] ее формулировку в светоподобной калибровке с моделью Весса – Зумино – Новикова – Виттена для группы $SL(2,R)$ и вычислил, исходя из этого, некоторые важные характеристики теории струн. Дистлер, Каваи и Давид воспроизвели этот же результат непосредственно в конформной калибровке [3]. Затем Поляков, Книжник и Замолодчиков [4] предложили способ подсчета показателей размерной трансмутации первичных (примарных) полей в квантовой двумерной конформной теории поля, обусловленной их гравитационным взаимодействием, и обнаружили, что условие сокращения квантовых аномалий приводит к дробной размерности пространства-времени. Суперсимметричное обобщение работы [2] было дано Поляковым и Замолодчиковым в работе [5].

В работе Дистлера, Каваи и Давида [3] была фактически доказана независимость значений наблюдаемых параметров теории от использованной схемы регуляризации, поскольку последняя определяется по сути выбором калибровки при вычислении эффективного действия. Эквивалентность различных схем регуляризации обсуждалась в [6]. Была также найдена формулировка двумерной индуцированной супергравитации, соответствующая вейль-инвариантной схеме регуляризации [7].

Голоморфные свойства эффективного действия индуцированной гравитации исследовались в [8, 9]. В работе [10] была сделана попытка учесть влияние внешней кривизны на действие индуцированной гравитации.

Авторы статьи [11] исследовали соотношение между супер-вейлевской и супер-вирасоровской аномалиями и построили супер-вейль-инвариантный функционал путем сокращения супер-вирасоровской аномалии при помощи нелокального функционала.

Нелокальное действие двумерной индуцированной супергравитации, зависящее только от гравитационных переменных, было представлено в работе [12]. Однако ковариантная формулировка теории, не содержащая дополнительных переменных, аналогичная выражению $R\frac{1}{\Box}R$ для обычной двумерной гра-

[1)]e-mail: karakhan@lx2.yerphi.am

витации, до сих пор отсутствовала, и цель данной статьи – заполнить этот пробел.

Полученный результат может быть обобщен также и на высшие размерности. Анализ вейлевской аномалии для размерностей $d = 4$ и $d = 6$ в случае теории обычной гравитации представлен в работе [13], где получено обобщение действия Полякова на этот случай. Однако для высших размерностей, в отличие от 2D, число степеней свободы превышает число симметрий классического действия, и полное эффективное действие не может быть воспроизведено путем интегрирования аномальных тождеств Уорда – зависимость от остальных компонентов метрического тензора будет выражаться в виде "констант интегрирования". Поэтому нелокальное выражение, полученное данным способом, будет лишь частью полного эффективного действия, соответствующей вкладу вейлевской аномалии.

2. В теории гравитации гравитонные возбуждения описываются бесследовыми возмущениями метрики, и общая ковариантность требует, чтобы классическое действие теории оставалось неизменным при подобных вариациях метрического тензора. Хорошо известно, что в двумерной теории общая ковариантность всегда сопровождается еще и вейлевской инвариантностью: любое выражение, записанное в виде интеграла по двумерному многообразию от скалярной плотности, составленной из локальных полей материи и метрического тензора, инвариантно относительно преобразования Вейля: $g_{\alpha\beta}(x) \to \rho(x) g_{\alpha\beta}$. Таким образом, вейлевская инвариантность подразумевает независимость действия также и от оставшихся вариаций метрики $g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$. Другими словами, общековариантное действие в двумерной теории не зависит от метрического тензора, и двумерное пространство-время является локально плоским, то есть может быть сделано таковым в пределах каждой координатной окрестности преобразованием координат.

Однако квантовые флуктуации разрушают эту симметрию и вариация эффективного действия относительно конформных преобразований метрики более не равна нулю:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\delta W}{\delta g_{\alpha\beta}} = R, \tag{1}$$

здесь R – кривизна пространственно-временного многообразия. Нетрудно видеть, что, будучи конформной аномалией, кривизна R удовлетворяет условию самосогласованности: при вейлевских преобразованиях

$$\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\delta\sigma \tag{2}$$

кривизна преобразуется по правилу

$$\delta[\sqrt{g}R] = \sqrt{g}\Box\delta\sigma, \tag{3}$$

где $\Box$ означает оператор Лапласа, действующий на скалярные поля. Так что вторая производная эффективного действия W по отношению к σ симметрична:

$$\frac{\delta R(x)}{\delta\sigma(y)} = \frac{\delta R(y)}{\delta\sigma(x)}, \tag{4}$$

то есть R определяет самосогласованное выражение для вейлевской аномалии.

В двумерной супергравитации партнер гравитона (гравитино) описывается компонентами поля Рариты – Швингера, соответствующими спину 3/2, так что локальная суперсимметрия подразумевает независимость действия от этих компонент. На классическом уровне двумерное суперпространство также является локально плоским, поскольку локальная суперсимметрия в двух измерениях всегда сопровождается также и супер-вейлевской симметрией, которая означает независимость действия также и от компонент спина 1/2:

$$\delta\chi_\alpha = \gamma_\alpha\delta\lambda. \tag{5}$$

Эта симметрия также нарушается квантовыми поправками: свертка супертока теории (суперпартнера тензора энергии-импульса) J^α, то есть вариационной производной эффективного действия по супервейлевскому параметру с γ-матрицами

$$\delta W/\delta\lambda = \gamma_{,\alpha} J^\alpha \tag{6}$$

уже не равна нулю, в отличие от производной классического действия.

Чтобы найти явное выражение для супервейлевской аномалии, можно использовать условие интегрируемости эффективного действия (условие самосогласованности Весса – Зумино): вариационная производная кривизны (вейлевской аномалии) по λ должна равняться производной супер-вейлевской аномалии по σ. Зависимость кривизны от λ происходит от неминимального слагаемого в выражении для спинорной связности:

$$\omega_\alpha = -e^a_\alpha\frac{\epsilon^{\mu\nu}}{e}\partial_\mu e^a_\nu - 2i\bar\chi_\alpha\gamma_3\gamma^\mu\chi_\mu, \tag{7}$$

где e – детерминант репера. Разрешая это условие, находим следующую систему аномальных тождеств Уорда для эффективного действия двумерной супергравитации, вычисленного в суперкоординатно-инвариантной регуляризации:

$$g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = R,$$
$$\gamma^\alpha J_\alpha = -4i\frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{e}\gamma_3 D_\alpha\chi_\beta, \tag{8}$$

где $D_\alpha\lambda = \partial_\alpha\lambda + (\gamma_3\omega_\alpha\lambda)/2$.

Наконец, последняя, третья компонента условия Весса – Зумино также удовлетворяется: производная по λ от супер-вейлевской аномалии (8) симметрична при замене аргументов так же, как и производная кривизны по σ. Это выражение для аномалии совпадает с результатом, найденным авторами [14]. Взяв конечные вейлевскую и супер-вейлевскую вариации от правых частей уравнений (8), умножая их на $\delta\sigma$ и $\delta\lambda$, соответственно, и складывая, получим, что полная вариация эффективного действия равна сумме действия Невье – Шварца и интеграла от выражения $R\sigma$ и $-4i\frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{e}\bar\lambda\gamma_3 D_\alpha\chi_\beta$. Действительно, поскольку уравнения (8), самосогласованны, описанное выше вариационное уравнение интегрируемо, и ответ дается выражением

$$S(\sigma,\lambda;e^a_\alpha,\chi_\alpha) =$$
$$= \int ed^2x[R\sigma - 4i\epsilon^{\alpha\beta}/e\bar\lambda\gamma_3 D_\alpha\chi_\beta - 1/2g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma -$$
$$- i/2\bar\lambda\gamma^\alpha\partial_\alpha\lambda + i\bar\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha\chi_\beta(\partial_\alpha\sigma - i/2\bar\lambda\chi_\alpha)]. \tag{9}$$

Этот результат также был получен в работе [15]. Функционал $S(\sigma,\lambda;e^a_\alpha,\chi_\alpha)$ обладает свойством коцикличности:

$$S(\sigma_1+\sigma_2,\lambda_1+\lambda_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha) =$$
$$= S(\sigma_1, e^{-\sigma_2/4}\lambda_1; e^{\sigma_2/2}e^a_\alpha, e^{\sigma_2/4}(\chi_\alpha + \tfrac14\gamma_\alpha\lambda_2)) +$$
$$+ S(\sigma_2,\lambda_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha). \tag{10}$$

С точки зрения теории когомологий, в теории двумерной супергравитации коцепями по отношению к преобразованиям Вейля должны быть избраны безразмерные локальные действия, построенные из гравитационных (e^a_α, χ_α) и групповых (σ, λ) переменных, обладающие соответствующими свойствами коцикличности. Переменные σ и e^a_α безразмерны, χ_α и λ имеют размерность 1/2, а производная имеет размерность 1.

Явление квантовой аномалии соответствует при квантовании переходу от точных представлений в пространстве функций, определенных на фазовом пространстве классической теории, к проективным представлениям волновой функции состояния в квантовой теории. Аномалия при этом определяется фазовым множителем перед волновой функцией (статистической суммой) теории и представляет собой 1-коцикл. Тогда групповое умножение немедленно влечет за собой свойство (10) для этого фазового множителя. 0-коцепь определяется произвольным контрчленом (не содержит групповых параметров), и ее добавление к эффективному действию соответствует конечной перенормировке последнего. Любая кограница, то есть конечная (супер) вейлевская вариация 0-коцепи, является 1-коциклом. Если аномальный фазовый множитель определяется когграницей некоторого локального функционала, то последний может быть поглощен переопределением эффективного действия, и такая аномалия является устранимой, а теория – неаномальной.

Согласно этому определению, функционал (9) является 1-коцепью. Очевидно, что любая 1-коцепь не более чем квадратична по групповым переменным и слагаемые максимальные степени групповых переменных супер-вейль инвариантны.

В рассматриваемом случае аномалия является неустранимой и коцикл (9) может быть представлен в виде когграницы только в более широком классе нелокальных функционалов:

$$S(\sigma,\lambda;e^a_\alpha,\chi_\alpha) =$$
$$= W[e^{\sigma/2}e^a_\alpha, e^{\sigma/4}(\chi_\alpha + \tfrac14\gamma_\alpha\lambda)] - W[e^a_\alpha,\chi_\alpha]. \tag{11}$$

Этот функционал суперковариантен, но неинвариантен относительно вейлевских преобразований и соответствует эффективному действию теории, вычисленному в схеме регуляризации, инвариантной по отношению к супер-диффеоморфизмам. Действительно, искомое эффективное действие определяется аномальными уравнениями (8). Выражение (11), очевидно, удовлетворяет этим ограничениям. Свойство коцикличности S является тривиальным следствием этого соотношения. Поэтому мы будем пытаться найти эффективное действие, исходя из выражения (9). Однако попытка произвести гауссово интегрирование по групповым переменным, учитывая его квадратичную зависимость от последних, не приводит к желаемому результату из-за наличия смешанного члена $i\bar\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha\chi_\beta\partial_\alpha\sigma$ в (9). Рассматривая (11) в качестве исходного соотношения для определения $W[e^a_\alpha,\chi_\alpha]$ и пытаясь удовлетворить ему с учетом (9) нелокальным функционалом вида *anomaly (Weyl-invariant diff. op.)*$^{-1}$ *anomaly* [13], мы должны будем учесть имеющийся произвол в добавлении локальных контрчленов. В качестве вейль-инвариантного оператора, фигурирующего в этой символической записи, могут быть взяты кинетические операторы действия Невье – Шварца, которые возникают в качестве матричных элементов матрицы вторых производных эффективного действия. К сожалению, эта матрица недиагональна. Нетрудно видеть, что она может быть диагонализирована при помощи конечной перенормировки меры функционального интеграла в определении эффективного действия, соответствующей добавлению контрчлена:

$$W'[e^a_\alpha,\chi_\alpha]=W[e^a_\alpha,\chi_\alpha]+8i\int ed^2x\overline{\chi}_\beta\gamma^\beta D^\alpha\chi_\alpha. \quad (12)$$

Эта перенормировка приведет, естественно, к переопределению токов, и система аномальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\delta W'}{\delta\sigma(x)}&\equiv g^{\alpha\beta}T'_{\alpha\beta}=R-4i\nabla_\alpha(\bar\chi_\beta\gamma^\beta\chi^\alpha),\\ \frac{\delta W'}{\delta\lambda(x)}&\equiv\gamma^\alpha J'_\alpha=-4iD_\alpha(\gamma^\alpha\gamma^\beta\chi_\beta).\end{aligned} \quad (13)$$

Коцикл, возникающий при интегрировании этой системы аномальных тождеств Уорда, является суммой коцикла (9) и кограницы добавленного контрчлена, линеен по групповым переменным! С учетом этого замечания легко проверить, что выражение

$$\begin{gathered}\int e[(R-i/4\nabla_\alpha(\bar\chi_\mu\gamma^\mu\chi_\alpha))\times\\ \times\frac{1}{e\Box}e(R-i/4\nabla_\beta(\bar\chi_\nu\gamma^\nu\chi_\beta))+\\ +e^{3/4}(-4iD_\alpha(\bar\chi_\mu\gamma^\mu\gamma^\alpha))\times\\ \times\frac{1}{e^{1/2}(-1\gamma^\nu D_\nu+\chi_\nu\bar\chi_\rho\gamma^\nu\gamma^\rho)}\times\\ \times e^{3/4}(-4iD_\beta(\gamma^\beta\gamma^\tau\chi_\tau))]\end{gathered} \quad (14)$$

имеет такие же трансформационные свойства, что и $W'[e,\chi]$. Действительно, при взятии вейлевской кограницы (конечной вариации) нелокальность сокращается при помощи того же самого механизма, что и чисто бозонной теории для действия Полякова. В результате кограница предложенного выражения дает два независимых коцикла:

$$\begin{gathered}S(\sigma;e^a_\alpha,\chi_\alpha)+S(\lambda;e^a_\alpha,\chi_\alpha)=\\ =W'[e^{\sigma/2}e^a_\alpha,e^{\sigma/4}(\chi_\alpha+\tfrac14\gamma_\alpha\lambda)]-W'[e^a_\alpha,\chi_\alpha],\end{gathered} \quad (15)$$

где

$$\begin{gathered}S(\sigma;e^a_\alpha,\chi_\alpha)=\\ =\int ed^2x\left(R\sigma-1/2g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma+4i\bar\chi_\beta\gamma^\beta\chi^\alpha\partial_\alpha\sigma\right),\end{gathered} \quad (16)$$

будучи 1-коциклом по отношению к вейлевским преобразованиям

$$\begin{gathered}S(\sigma_1+\sigma_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha)=\\ =S(\sigma_1;e^{\sigma_2/2}e^a_\alpha,e^{\sigma_2/4}\chi_\alpha)+S(\sigma_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha),\end{gathered} \quad (17)$$

супер-вейль инвариантен. Тогда как другой:

$$\begin{gathered}S(\lambda;e^a_\alpha,\chi_\alpha)=\int ed^2x\left(i/2\bar\lambda\gamma^\alpha\partial_\alpha\lambda+2i\bar\chi_\beta\gamma^\beta D_\alpha\chi^\alpha+\right.\\ \left.+2\bar\chi_\mu\gamma^\mu\gamma_3\chi_\alpha\bar\lambda\gamma_3\gamma^\beta\gamma^\alpha\chi_\beta-1/4\bar\lambda\lambda(\bar\chi_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta\chi^\alpha)\right),\end{gathered} \quad (18)$$

вейль-инвариантен, а по отношению к супервейлевским преобразованиям является 1-коциклом:

$$\begin{gathered}S(\lambda_1+\lambda_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha)=\\ =S(\lambda_1;e^a_\alpha,(\chi_\alpha+\tfrac14\gamma_\alpha\lambda_2))+S(\lambda_2;e^a_\alpha,\chi_\alpha).\end{gathered} \quad (19)$$

Более тщательное исследование показывает, однако, что этот последний – тривиален, то есть является кограницей локального контрчлена.

Таким образом, окончательное выражение для $W[e,\chi]$ приобретает вид

$$\begin{gathered}W[e,\chi]=4i\int d^2x\bar\chi_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta D_\alpha(\gamma_\mu\chi^\mu)+\\ +\int e(R-i/4\nabla_\alpha(\bar\chi_\mu\gamma^\mu\chi_\alpha))\times\\ \times\frac{1}{e\Box}e(R-i/4\nabla_\alpha(\bar\chi_\mu\gamma^\mu\chi_\alpha)).\end{gathered} \quad (20)$$

Этот результат неудивителен, поскольку известно, что в двумерной супергравитации члены с кручением отщепляются, и кривизна может быть определена посредством одного лишь метрического тензора. Именно эта кривизна и фигурирует в найденном выражении для эффективного действия.

В этой интерпретации первое слагаемое в (20) отражает конечную перенормировку, которую претерпевает действие за счет вклада отщепившихся ферми-полей.

3. Таким образом, основной вывод, следующий из нашего опыта работы с вейлевской аномалией, может быть сформулирован следующим образом: наиболее общий вид конформной аномалии дается тремя типами решений соответствующего условия самосогласованности Весса – Зумино: плотность эйлеровой характеристики пространственно-временного многообразия, вейль-инвариантные лагранжевы плотности и вариационные производные по вейлевскому параметру от безразмерных локальных действий – улучшающие члены.

В классе решений условий самосогласованности всегда найдется представитель, имеющий линейную (и диагональную в суперсимметричном случае) конечную вейлевскую вариацию. Соответствующий коцикл при этом будет квадратичен по вейлевскому параметру, и соответствующий аномальный фазовый множитель, будучи проинтегрирован по групповым переменным, дает вклад конформной аномалии в выражение для эффективного действия.

Описанные аргументы применимы и к четырехмерной супергравитации. В этом случае, однако, мы не восстановим всего эффективного действия, как в двумерной, поскольку уравнения аномалии содержат информацию только об аномальной зависимости эффективного действия от параметров супергруппы Вейля – детерминанте метрики и компонент поля Рариты – Швингера, соответствующих спину $1/2$. После учета общей ковариантности и локальной суперсимметрии эффективное действие все еще будет зависеть от пяти степеней свободы метрики и восьми степеней свободы поля Рариты – Швингера, которая аномальными уравнениями не фиксируется. Соответствующие члены в эффективном действии возникают в качестве констант интегрирования при решении аномальных уравнений.

Автор признателен А. Г. Седракяну и Р. Курики за полезные замечания.

---

1. A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B103**, 207, 211 (1981).
2. A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A2**, 893 (1987).
3. F. David, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1651 (1988); F. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. **B321**, 509 (1989).
4. V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 819 (1988).
5. A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1213 (1988).
6. D. R. Karakhanyan, R. P. Manvelyan, and R. L. Mkrtchyan, Phys. Lett. **B329**, 185 (1994).
7. D. R. Karakhanyan, Phys. Lett. **B365**, 53 (1996).
8. S. Lazzarini and R. Stora, in: *Knots, topology and quantum field theory, 13th John Hopkins Workshop*, Ed. L. Lusanna, World Scientific, Singapore, 1989.
9. D. R. Karakhanyan, Phys. Atom. Nucl. **56**, 1294 (1993).
10. D. R. Karakhanian and A. G. Sedrakian, Phys. Lett. **B236**, 140 (1990); Phys. Lett. **B260**, 53 (1991).
11. T. Fujiwara, H. Igarashi, and T. Suzuki, Ann. Phys. **254**, 233 (1997).
12. M. Grisaru and R. Xu, Phys. Lett. **B205**, 486 (1988).
13. D. R. Karakhanyan, R. P. Manvelyan, and R. L. Mkrtchyan, Mod. Phys. Lett. **A11**, 409 (1996).
14. T. Fujiwara, Y. Igarashi, M. Koseki et al., Nucl. Phys. **B425**, 289 (1994).
15. K. Kamimura, J. Gomis, and R. Kuriki, Nucl. Phys. **B471**, 513 (1996).