Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 4, с. 200 – 204 

# Хаотическое блуждание атома в когерентном поле стоячей световой волны

*С. В. Пранц, Л. Е. Коньков*

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева*
*Дальневосточного отделения РАН*
*690041 Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 2 октября 2000 г.
После переработки 26 декабря 2000 г.

Теоретически предсказан и численно обнаружен новый эффект хаотического блуждания центра масс холодного атома в когерентном поле стоячей световой волны в высокодобротном резонаторе Фабри – Перо, возникающий в отсутствие каких-либо случайных флуктуаций, обусловленных спонтанным излучением. Численные эксперименты показывают, что гамильтонов хаос возникает вблизи резонанса в области значений параметров, характерных для режима сильной связи, реализованного недавно в экспериментах. Обнаруженный эффект представляет интерес для исследования квантово-классического соответствия и квантового хаоса в атомной оптике.

PACS: 32.80.Lg, 42.65.Sf

При взаимодействии свободного атома с резонансным электромагнитным полем происходит не только изменение внутренних (электронных) степеней свободы атома, но и одновременное изменение его внешних (трансляционных) степеней свободы. Идеи лазерного воздействия на трансляционные степени свободы [1 – 4] привели к развитию мощных методов охлаждения и пленения атомов с помощью лазерного света [5 – 7]. В обычных условиях интенсивность светового поля достаточно велика, и его можно считать неисчерпаемым резервуаром энергии и импульса для атома, существование которого никак не влияет на состояние поля. В высокодобротном микрорезонаторе взаимодействие атома с полем настолько сильное, что между ними становится возможным многократный обмен возбуждением. Режим сильной связи для внутренних ($\Omega_0\sqrt{n} > \Gamma_{a,f}^{-1}$, где $\Omega_0$ – однофотонная частота Раби, $n$ – среднее число фотонов в моде, $\Gamma_{a,f}$ – скорости релаксации атомного диполя и фотонов) и внешних ($\hbar\Omega_0\sqrt{n} > mv_a^2$, где $v_a$ – скорость атома) степеней свободы атома недавно экспериментально реализован [8, 9].

Фундаментальная модель взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы атома в световом поле стоячей волны с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + + \hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)\sin(k\hat{x} + \varphi) \qquad (1)$$

описывает в приближении вращающейся волны *когерентную* динамику двухуровневого атома в идеальном одномерном резонаторе типа Фабри-Перо. В настоящем сообщении показано: 1) в рамках фундаментальной модели в отсутствие каких-либо случайных флуктуаций возможен *новый эффект хаотического блуждания* центра масс атома в когерентном потенциальном поле стоячей световой волны; 2) гамильтонов динамический хаос возникает вблизи резонанса в области значений параметров, характерных для режима сильной связи [8, 9]; 3) вследствие этого эффекта частично разрушается регулярная структура потенциальных ям-ловушек для медленных атомов и исчезает регулярная пространственная модуляция осцилляций Раби для быстрых атомов. Подчеркнем, что эффект хаотического блуждания центра масс атома возникает в модели (1) динамического взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы атома и полевой степени свободы. До сих пор хаос во взаимодействии элементарных квантовых систем с излучением изучался в моделях, не учитывающих изменения импульса системы в процессе взаимодействия с полем (см. пионерскую статью [10] и другие статьи, например, [11, 12] и цитируемые там работы). В работах [13, 14] динамический хаос был численно обнаружен и исследован в модели параметрического взаимодействия движущихся атомов с полем с учетом пространственной структуры стоячей волны, но опять-таки без учета изменения импульса атома (то есть в приближении Рамана – Ната).

Гамильтониан (1) описывает взаимодействие трех подсистем: трансляционной, характеризуемой операторами координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p}$ атома; электронной, характеризуемой операторами Паули $\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$ и $\hat{\sigma}_z$, и полевой, характеризуемой операторами уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^{\dagger}$ фотона. Полуклассическая когерентная динамика взаимодействия этих подсистем описывается уравнениями Гейзенберга

$$\dot{\xi} = \alpha\rho, \quad \dot{\rho} = -u\sin\xi, \quad \dot{u} = \delta v,$$
$$\dot{v} = -\delta u + 2Nz\cos\xi, \quad \dot{z} = -2v\cos\xi, \tag{2}$$

выведенными из гамильтониана (1) с начальной фазой $\varphi = -\pi/2$ для следующих безразмерных переменных:

$$\xi = k\langle\hat{x}\rangle, \quad \rho = \frac{1}{\hbar k}\langle\hat{p}\rangle,$$
$$u = \langle\hat{a}^{\dagger}\sigma_{-} + \hat{a}\hat{\sigma}_{+}\rangle, \quad v = i\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-} - \hat{a}\hat{\sigma}_{+}\rangle, \tag{3}$$
$$z = \langle\hat{\sigma}_z\rangle,$$

которые являются средними значениями соответствующих операторов, взятыми по квантовому состоянию $|\psi\rangle$ полной системы. В начальный момент времени $\tau_0 = \Omega_0 t_0$ оно предполагается факторизованным в произведение векторов трансляционного $|\psi_0\rangle_{tr}$, электронного $|\psi_0\rangle_e$ и полевого $|\psi_0\rangle_f$ состояний. Управляющими параметрами замкнутой системы нелинейных уравнений (2) являются нормированная расстройка резонанса $\delta = (\omega_f - \omega_a)/\Omega_0$, нормированная частота отдачи $\alpha = \hbar k^2/m\Omega_0 \equiv 2\omega_R/\Omega_0$ и число возбуждений $N = n + \frac{1}{2}(z+1)$, которое, как известно, сохраняется в приближении вращающейся волны. Система (2) обеспечивает сохранение полной энергии и энергии электронно-полевого взаимодействия

$$W = \frac{\alpha}{2}\rho^2 - u\cos\xi - \frac{\delta}{2}z, \quad R = u^2 + v^2 + Nz^2. \tag{4}$$

Ее можно интерпретировать, как гамильтонову систему с двумя связанными степенями свободы – трансляционной (переменные $\xi$ и $\rho$) и электронно-полевой (переменные $u$ и $v$). В начальный момент времени величины $u$ и $v$ являются простыми комбинациями $u_0 = (e_0x_0 - p_0y_0)/2$, $v_0 = (e_0y_0 + p_0x_0)/2$ полевых переменных $e_0 \equiv \langle\hat{a}^{+} + \hat{a}\rangle_f$, $p_0 \equiv i\langle\hat{a}^{+} - \hat{a}\rangle_f$ и переменных атомного дипольного момента $x_0 \equiv \equiv \langle\hat{\sigma}_x\rangle_e$, $y_0 \equiv \langle\hat{\sigma}_y\rangle_e$.

Если частота моды $\omega_f$ совпадает с частотой атомного перехода $\omega_a$, то есть если $\delta = 0$, то из третьего уравнения (2) следует наличие дополнительного интеграла движения $u = u_0$. В этом случае движение центра масс атома в потенциальном периодическом поле $U = -\alpha u_0\cos\xi$, созданном стоячей волной, описывается простым уравнением свободного нелинейного осциллятора $\ddot{\xi} + \alpha u_0\sin\xi = 0$ и не зависит от изменения внутреннего состояния атома. В зависимости от начальных условий атом либо попадает в плен стоячей волны, и его центр масс совершает периодическое колебательное движение, либо он пересекает стоячую световую волну таким образом, что его импульс периодически промодулирован. Атом пленяется полем, если его начальный импульс удовлетворяет условию $\rho_0 \le \rho_{cr} = 2\sqrt{u_0/\alpha}$. Величины критической скорости атома и нормированной частоты его малых колебаний в потенциальной яме $\sqrt{\alpha u_0}$ зависят от начальных значений компонент напряженности поля и атомного диполя. Из приведенных соотношений следует, что в случае точного резонанса атом будет двигаться равномерно и прямолинейно, если поле и/или атом вначале приготовлены так, что $u_0 = 0$, то есть $e_0x_0 = p_0y_0$. В частности, полностью инвертированный атом $(z_0 = 1, x_0 = y_0 = 0)$ продолжит равномерное прямолинейное движение независимо от того, в каком состоянии $|\psi_0>_f$ приготовлено поле стоячей волны. То же случится с атомом, влетающим в резонатор, поле в котором находится в фоковском состоянии $|n>_f$ с определенным числом фотонов, независимо от того, в каком состоянии $|\psi_0>_e$ он находился вначале. Эти рассуждения справедливы, разумеется, в отсутствие диссипации. Так в рамках приближения сильной связи игнорируется затухание избранной моды и спонтанное излучение в другие моды.

С другой стороны, эволюция внутренней энергии атома и эволюция среднего числа фотонов в моде зависят от трансляционных степеней свободы, так как от местоположения атома в периодическом потенциале стоячей волны зависит сила его связи с полем. Из последних двух уравнений (2) с помощью (4) находится уравнение движения для инверсии населенности

$$\dot{z} = \pm 2\sqrt{R - Nz^2}\cos\xi(\tau), \tag{5}$$

которое легко решается:

$$z(\tau) = \pm\sqrt{\frac{R}{N}}\sin\left(2\sqrt{N}\int_0^{\tau}\cos[\xi(\tau)]d\tau + \text{const}\right). \tag{6}$$

Таким образом, внутренняя энергия атома (и среднее число фотонов в моде) испытывает периодически промодулированные осцилляции. В предельном случае большой расстройки, $\delta \gg \sqrt{N}$, можно адиабатически исключить инверсию населенности из (2). В результате число степеней свободы системы (2) эффективно редуцируется до единицы, и она становится интегрируемой с периодическими решениями. Фактически мы имеем дело с двумя связанными осцилляторами, один из которых (электронно-полевой) линейный, причем частота собственных колебаний последнего $\delta$ гораздо больше частоты малых колебаний трансляционного осциллятора $\sqrt{\alpha u_0}$.

В предельных случаях больших и малых расстроек система совершает периодические движения. Простой качественный анализ уравнений движения (2) дает количественный критерий предельных случаев: $\delta > \max\{1, \ 2\sqrt{N}, \ \alpha\rho_0/\sqrt{N}\}$ и $\delta < \min\{1, \ 2\sqrt{N}, \ \alpha\rho_0/\sqrt{N}\}$. Динамическая сложность во взаимодействии внутренних и внешних степеней свободы двухуровневого атома в поле стоячей световой волны возникает в окрестности резонанса. Прежде чем приступить к численным экспериментам, оценим диапазон значений управляющих параметров нашей системы в режиме сильной связи. В экспериментах [8, 9] атомы попадают в высокодобротный микрорезонатор Фабри – Перо (будучи предварительно охлажденными в магнитооптической ловушке до энергии $E_k$ порядка милликельвин), двигаясь в радиальной плоскости (в которой мода стоячей волны имеет гауссову форму) поперек оси резонатора $x$ с формой моды $\cos kx$. При малых скоростях движения они захватываются гауссовой потенциальной ямой. Осцилляции атома в яме косвенно регистрируются в реальном времени по изменению интенсивности пробного лазерного пучка, направленного вдоль оси $x$. Поскольку вероятность перехода между состояниями "одетого атома" под действием лазерной накачки зависит от координаты атома $\mathbf{r}$, то интенсивность света, прошедшего сквозь резонатор с атомом, прямо зависит от силы связи атома с полем $\Omega(\mathbf{r})$. По регистрируемым осцилляциям интенсивности можно восстановить траекторию атома в радиальной плоскости.

Авторы [8] работали с атомами цезия с массой $m_a \simeq 10^{-22}$ г, кинетической энергией $E_k \simeq 0.46$ мК, частотой рабочего перехода $\omega_a \simeq 2\pi \cdot 3.5 \cdot 10^8$ МГц, отстройкой от резонанса $|\omega_f - \omega_a| \simeq 2\pi \cdot 50$ МГц, скоростью распада $\Gamma_a \simeq 2\pi \cdot 2.6$ МГц, который помещался в резонатор Фабри – Перо с длиной 10.9 мкм, добротностью $Q \simeq 4.8 \cdot 10^5$, скоростью затухания поля $\Gamma_f \simeq 2\pi \cdot 14.2$ МГц и глубиной потенциальной ямы стоячей волны $\simeq 2.3$ мК. Поскольку величина однофотонной частоты Раби в пучности стоячей волны $\Omega_0 \simeq 2\pi \cdot 110$ МГц больше $\Gamma_{a,f}$, а $\hbar\Omega_0 \simeq 5.3$ мК больше $E_k$, то условия сильной связи выполняются и для внутренних и для внешних степеней свободы атома. На основе этих величин вычисляются безразмерные управляющие параметры нашей системы (2) – частота отдачи $\alpha \simeq 4 \cdot 10^{-6}$ и расстройка $|\delta| \simeq 0.4$. Параметры эксперимента [9] с атомом $^{85}$Rb дают значения $\alpha \simeq 4.4 \cdot 10^{-4}$ и $|\delta| \simeq 1$, а для легкого атома He получим $\alpha \simeq 10^{-3}$ и $|\delta| \simeq 0.5$. В полуклассическом приближении атом является материальной точкой с координатой $< \hat{x} >$ и импульсом $< \hat{p} >$, движущейся под действием силы $-\hbar k \Omega_0 < \hat{u} \cos k\hat{x} >$. Это приближение допустимо, если энергия отдачи $\hbar\omega_R$ гораздо меньше других характерных энергий, кинетической $m v_a^2/2$ и электронно-полевой $\hbar\Omega_0$. Отсюда следует критерий справедливости полуклассического приближения, $\alpha \ll 1$ и $v_R = \hbar k/m \ll v_a$.

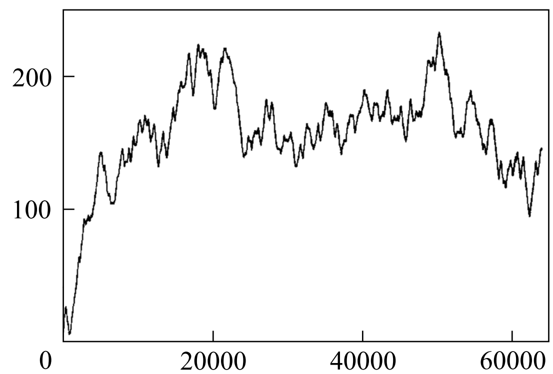


Рис.1. Типичная хаотическая траектория атома в когерентном поле стоячей световой волны

Если в начальный момент времени атом полностью инвертирован ($z_0 = 1$), то $u_0 = v_0 = 0$ независимо от типа квантового состояния поля в резонаторе. В пределе точного резонанса ($\delta = 0$) такой атом пе-

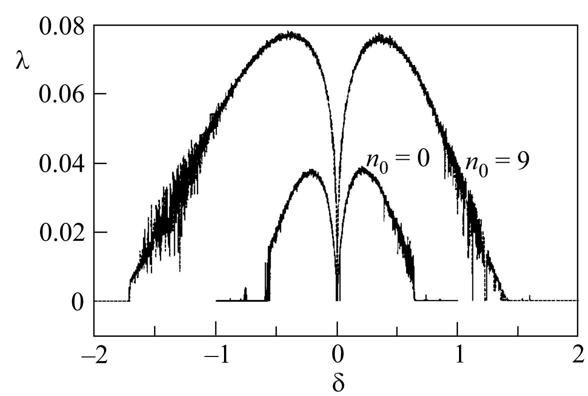


Рис.2. Зависимость максимального показателя Ляпунова $\lambda$ в единицах обратного безразмерного времени от нормированной расстройки резонанса $\delta$ для двух значений среднего начального числа фотонов $n_0$ в моде

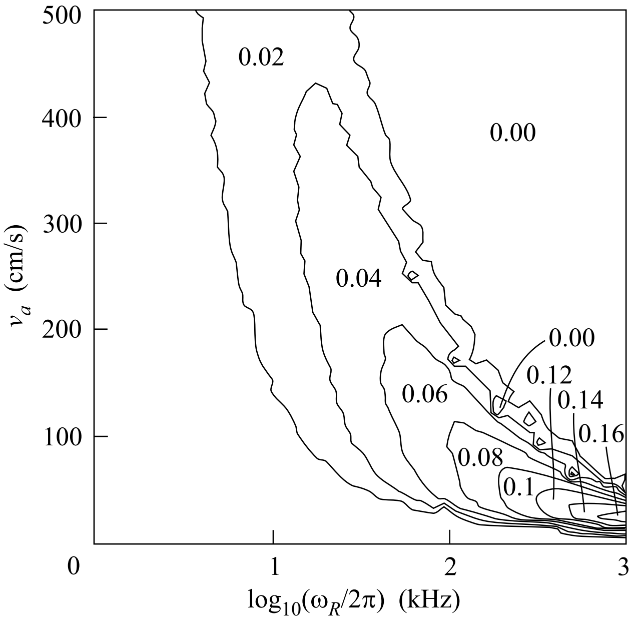


Рис.3. Топографическая карта значений $\lambda$ в зависимости от начальной скорости атома $v_a$(см/с) и частоты отдачи $\omega_R/2\pi$(кГц)

ресечет стоячую световую волну, не испытывая никакого влияния поля. Картина кардинально меняется для атома, немного отстроенного по частоте как в красную ($\delta < 0$), так и в голубую ($\delta > 0$) области. На рис.1 изображена типичная траектория движения атома He в поле стоячей волны с начальным средним числом фотонов $n_0 = 9$, с начальным импульсом $\rho_0 = 50$ при $\delta = 0.5$. Атом блуждает по резонатору, осциллируя в ямах и случайно перескакивая из одной в другую. То, что это движение хаотическое в смысле экспоненциальной чувствительности к изменению начальных условий, доказано в результате вычислений максимального показателя Ляпунова $\lambda$ системы (2) в единицах обратного безразмерного времени. На рис.2 изображена зависимость $\lambda$ от величины расстройки $\delta$ при различных начальных значениях $n_0$. Как и следовало ожидать, хаос исчезает ($\lambda = 0$) вблизи резонанса и вдали от него. Отметим, что при $\delta \neq 0$ атом может хаотически двигаться, даже если поле в резонаторе в начальный момент времени находилось в вакуумном состоянии. На рис.3 приведена так называемая топографическая $\lambda$-карта [13, 14] в координатах $v_a - \omega_R/2\pi$ при фиксированных значениях $\delta = 0.5$ и $N = 10$, на которой оттенками цвета выведены области значений $\lambda$ для начальных скоростей $v_a$ атома в диапазоне 1–500 см/с и частоты отдачи $\omega_R/2\pi$ в диапазоне 1–1000 кГц. С помощью этой карты находятся значения этих величин (и следовательно, определяется тип атома), для которых можно ожидать хаотическое или регулярное движение атома в резонаторе.

Итак, мы теоретически предсказали и численно обнаружили эффект хаотического блуждания атома в высокодобротном резонаторе Фабри – Перо в области значений параметров, характерных для режима сильной связи. Полуклассический гамильтонов хаос возникает в результате *когерентного обмена энергией между трансляционными и электронно-полевыми степенями свободы нелинейной системы “атом + поле + резонатор” в отсутствие каких-либо случайных флуктуаций, обусловленных спонтанным излучением или другими факторами, нарушающими когерентность.* Реализация режима сильной связи для одиночных атомов и фотонов в экспериментах [8, 9] позволяет надеяться на перспективность специальных экспериментов по изучению квантово-классического соответствия и квантового хаоса в атомной оптике. Особенно интересным представляется исследование особенностей квантовой динамики атомного волнового пакета в квантованном поле и, в частности, эффекта динамической локализации в той области параметров, где нами обнаружен полуклассический хаос.

В заключение заметим, что в настоящей работе изучалась гамильтонова динамика атома в пространственно периодическом оптическом потенциале, которую можно считать адекватной в режиме очень сильной связи ($\Omega_0\sqrt{n} \gg \Gamma_{a,f}$). Быстрое совершенствование экспериментальной техники позволяет надеяться на реализацию этого режима в скором времени для одиночных атомов и фотонов в оптическом диапазоне. Учет диссипации и спонтанного излучения возможен в рамках полуклассического подхода и, по-видимому, может привести к возникновению диссипативного хаоса, заслуживающего специального изучения.

Настоящая работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 02-17269).


1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
2. В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ **7**, 348 (1968).
3. A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **25**, 1081 (1970).
4. T. W. Hansch and A. L. Shawlow, Opt. Comm. **13**, 68 (1975).
5. S. Chu, Rev. Mod. Phys. **70**, 685 (1998).
6. C. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
7. W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).
8. J. Yen and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **83**, 4987 (1999).

9. P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
10. П. И. Белобров, Г. М. Заславский, Г. Х. Тартаковский, ЖЭТФ **71**, 1799 (1976).
11. J. R. Ackerhalt, P. W. Milonni, and M. L. Shih, Phys. Rep. **128**, 205 (1985).
12. A. R. Kolovsky, S. Miyazaki, and R. Graham, Phys. Rev. **E50**, 70 (1994).
13. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, Phys. Lett. **A225**, 33 (1997).
14. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, Phys. Rev. **E61**, 3632 (2000).