

Затухание фотона в результате рождения электрон-позитронной пары в сильном магнитном поле

Н. В. Михеев, Н. В. Чистяков¹⁾

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, 15000 Ярославль, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 2001 г.

Исследуется затухание электромагнитной волны в присутствии сильного магнитного поля в кинематической области, близкой к порогу рождения электрон-позитронной пары. Показано, что в данной области неэкспоненциальный характер затухания электромагнитного поля усилен. Обнаружено, что эффективная ширина распада фотона, $\gamma \rightarrow e^+e^-$, существенно меньше по сравнению с известными в литературе результатами.

PACS: 13.40.Nq, 95.30.Cq

Задача о распространении электромагнитных полей в активной среде возникает при рассмотрении самых различных физических явлений. Наиболее масштабными и интересными из них являются рождение и эволюция сверхновых и нейтронных звезд, внутри которых плотность вещества может достигать величин порядка ядерных ($\rho \sim 10^{14} - 10^{15}$ г/см³), а температура нескольких десятков МэВ. Наряду с плотной и горячей материей возможна также генерация сильного магнитного поля [1, 2], которое в описываемых выше объектах может превосходить на несколько порядков так называемое критическое или швингеровское значение²⁾, $B_e = m_e^2/c \simeq 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. В присутствии интенсивного магнитного поля возможны новые явления, которые могут существенно влиять на динамику развития подобных астрофизических объектов. К одному из таких явлений относится затухание электромагнитного поля в результате рождения электрон-позитронной пары во внешнем магнитном поле. Напомним, что в вакууме процесс $\gamma \rightarrow e^+e^-$ кинематически запрещен. Присутствие магнитного поля приводит к изменению кинематики заряженных частиц (электронов и позитронов), что делает процесс рождения электрон-позитронной пары возможным в кинематической области $q_{\parallel}^2 = q_0^2 - q_3^2 \geq 4m_e^2$, где q_0 – энергия фотона, а q_3 – компонента импульса вдоль магнитного поля³⁾.

Процесс рождения электрон-позитронной пары фотоном в магнитном поле был рассмотрен Клепи-

ковым в 1954 г. [3]. Была получена амплитуда и ширина распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$ в квазиклассическом пределе. Позднее этот процесс рассматривался в ряде работ [4–9] в связи с возможным применением его в астрофизике. В работах [7, 8] отмечалось, что использование выражения для ширины, полученного в [3], приводит к существенному завышению результата в пределе сильного магнитного поля. В этом случае нужно использовать точное выражение для ширины однофотонного рождения пары, когда электроны и позитроны занимают только основной уровень Ландау. Было замечено, однако, что выражение для ширины распада в пределе сильного магнитного поля содержит особенность корневого типа в точке $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$. Как подчеркивалось в [9], данное обстоятельство свидетельствует о невозможности интерпретации данной ширины распада, вычисленной по теории возмущений вблизи порога рождения пары, как коэффициента затухания. В этом случае первичным для нахождения коэффициента затухания является временная зависимость волновой функции фотона в присутствии магнитного поля. Для определения такой зависимости в работе [9] в качестве метода предлагалось решать уравнение дисперсии с учетом поляризации вакуума в магнитном поле с комплексными значениями энергии фотона. Данный метод, однако, имеет на наш взгляд ряд недостатков. Во-первых, хорошо известно (хотя и редко упоминается), что решений уравнения дисперсии с комплексными энергиями на физическом листе не существует. Решения находятся на нефизических римановых листах (область аналитичности поляризационного оператора), число которых, вообще говоря, бесконечно. Это, в свою очередь, ведет к беско-

¹⁾ e-mail: mch@uniyar.ac.ru

²⁾ В работе используется естественная система единиц, $\hbar = c = 1$.

³⁾ Здесь и в дальнейшем магнитное поле предполагается направленным вдоль третьей оси.

нечному числу решений уравнения дисперсии как с положительными, так и с отрицательными значениями мнимой части энергии. Физический статус этих решений требует отдельного исследования.

В работе [9] использовалась асимптотическая форма поляризованного оператора вблизи порога рождения пары, которая ошибочно полагалась двулистной комплексной функцией. Данное обстоятельство привело к существованию двух комплексно сопряженных решений, одно из которых (с положительной мнимой частью) не может иметь физического смысла, так как приводит к экспоненциальному росту амплитуды электромагнитной волны. Таким образом, для получения физически осмысленного результата требуется "руками" отбрасывать лишние решения.

Во-вторых, в таком подходе не удастся корректно описать характер затухания в околороговой области в сильном поле, который в этом случае существенно отличается от экспоненциального.

Тем самым, способ описания затухающих электромагнитных волн в магнитном поле путем решения уравнения дисперсии не является самодостаточным.

В настоящей работе мы используем метод, применяемый в теории поля при конечных температурах и в физике плазмы, см., например, [10]. Он состоит в нахождении запаздывающего решения уравнения электромагнитного поля в присутствии внешнего источника с учетом поляризации вакуума в магнитном поле. Временное затухание электромагнитной волны исследуется во внешнем однородном магнитном поле, когда его величина является наибольшим параметром, $B_e \gg q^2, m_e^2$.

Для описания эволюции электромагнитной волны $\mathcal{A}_\alpha(x)$ во времени ($x_\mu = (t, \mathbf{x})$) рассмотрим линейный отклик системы ($\mathcal{A}_\alpha(x)$ и поляризованный в магнитном поле вакуум) на внешний источник, который адиабатически включается при $t = -\infty$ и в момент времени $t = 0$ выключается. При $t > 0$ электромагнитная волна будет эволюционировать самостоятельно. Таким образом источник необходим для создания начального состояния. Для простоты рассмотрим эволюцию монохроматической волны. Для этого функцию источника следует выбрать в виде

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = j_\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{\varepsilon t} \theta(-t), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (1)$$

Зависимость $\mathcal{A}_\alpha(x)$ от времени определяется уравнением

$$(g_{\alpha\beta} \partial_\mu^2 - \partial_\alpha \partial_\beta) \mathcal{A}_\beta(x) + \int d^4 x' \mathcal{P}_{\alpha\beta}(x-x') \mathcal{A}_\beta(x') = \mathcal{J}_\alpha(x), \quad (2)$$

где $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(x-x')$ – поляризационный оператор фотона в магнитном поле. Отметим, что для того, чтобы источник в правой части уравнения (2) являлся сохраняющейся величиной, $\partial_\alpha \mathcal{J}_\alpha = 0$, необходимо выбрать ток j_α в виде $j_\alpha = (0, \mathbf{j})$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$. Запаздывающее решение, описывающее эволюцию $\mathcal{A}_\alpha(x)$, имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha^R(x) = \int d^4 x' G_{\alpha\beta}^R(x-x') \mathcal{J}_\beta(x'), \quad (3)$$

где $G_{\alpha\beta}^R(x-x')$ – запаздывающая функция Грина. Она определяется через коммутатор гейзенберговских операторов электромагнитного поля $\hat{A}_\alpha(x)$ согласно

$$G_{\alpha\beta}^R(x-x') = -i \langle 0 | [\hat{A}_\alpha(x), \hat{A}_\beta(x')] | 0 \rangle \theta(t-t'), \quad (4)$$

см., например, [11]. Полезно выразить эту функцию через причинную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^C(x-x') = -i \langle 0 | \mathbf{T} \hat{A}_\alpha(x) \hat{A}_\beta(x') | 0 \rangle, \quad (5)$$

используя следующее соотношение:

$$G_{\alpha\beta}^R(x-x') = 2 \operatorname{Re} G_{\alpha\beta}^C(x-x') \theta(t-t'). \quad (6)$$

В магнитном поле удобно разложить функцию Грина (5) по собственным векторам поляризационного оператора [9]:

$$G_{\alpha\beta}^C(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_{\alpha\beta}^C(q) e^{-iqx}, \quad (7)$$

$$G_{\alpha\beta}^C(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_\alpha^{(\lambda)} b_\beta^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \frac{1}{q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}, \quad (8)$$

где $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ – собственные значения поляризационного оператора. Собственные векторы $b_\alpha^{(\lambda)}$:

$$\begin{aligned} b_\alpha^{(1)} &= (q\varphi)_\alpha, \\ b_\alpha^{(2)} &= (q\tilde{\varphi})_\alpha, \\ b_\alpha^{(3)} &= q^2 (q\varphi\varphi)_\alpha - (q\varphi\varphi q) q_\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

вместе с 4-вектором q_α образуют полный ортогональный базис в 4-пространстве Минковского. Здесь $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$, $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}$ – безразмерные тензор и дуальный тензор магнитного поля, $(q\varphi)_\alpha = q_\sigma \varphi_{\sigma\alpha}$, $(q\varphi\varphi q) = q_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\beta\sigma} q_\sigma$. Подставляя выражения (1), (6) в уравнение (3), и используя разложения (7), (8), после несложного интегрирования получаем для $\mathcal{A}_\alpha^R(x)$ следующий результат при $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha^R(x) &= \sum_{\lambda=1}^3 V_\alpha^{(\lambda)}(x) = 2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{b_\alpha^{(\lambda)} (b^{(\lambda)} j) / (b^{(\lambda)})^2 e^{-i q_0 t}}{(q_0 - i\varepsilon) (q_0^2 - \mathbf{k}^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q))}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $q_\alpha = (q_0, \mathbf{k})$. Следует отметить, что интеграл в последней формуле требует доопределения, так как подынтегральное выражение может содержать особенности, которые, с одной стороны, связаны с нулями знаменателя в (10), а с другой стороны, с областью определения подынтегральной функции. Для исследования этих особенностей необходимо знать явный вид и аналитические свойства собственных значений, $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$, поляризационного оператора, который подробно исследовался в целом ряде работ. Интересующие нас функции $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ в пределе сильного магнитного поля можно извлечь, например, из работ [9, 12, 13]. Они могут быть представлены в следующем виде (формулы приведены с точностью до $O(1/B)$):

$$\mathcal{P}^{(1)}(q) \simeq -\frac{\alpha}{3\pi} q_\perp^2 - q^2 \Lambda(B, q^2), \quad (11)$$

$$\mathcal{P}^{(3)}(q) \simeq -q^2 \Lambda(B, q^2), \quad (12)$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(q) \simeq -\frac{2\alpha eB}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \arctg \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1 \right) - q^2 \Lambda(B, q^2), \quad (13)$$

где

$$\Lambda(B, q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} [1.792 - \ln(B/B_e)] + \pi(q^2),$$

$$z = q_\parallel^2/4m_e^2, \quad q_\perp^2 = q_1^2 + q_2^2,$$

произведение $q^2 \cdot \pi(q^2)$ – поляризационный оператор фотона в отсутствие магнитного поля. Отметим, что вклад полюса $q_\parallel^2 = 0$, происходящего из нормировки базисных векторов $b_\alpha^{(2)}$ и $b_\alpha^{(3)}$, является нефизическим. С учетом явного вида собственных значений поляризационного оператора (11)–(13) он может быть устранен калибровочным преобразованием после суммирования по поляризациям. Таким образом, вклад в решение могут дать только полюсы, соответствующие уравнениям дисперсии:

$$q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q) = 0. \quad (14)$$

На основании выражений (11)–(13), используя решение (10), можно показать, что для реальных фотонов физический смысл имеют только две моды, $\lambda = 1, 2$, с векторами поляризации⁴⁾

$$\varepsilon_\alpha^{(1)} = \frac{b_\alpha^{(1)}}{\sqrt{(b^{(1)})^2}} = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \frac{b_\alpha^{(2)}}{\sqrt{(b^{(2)})^2}} = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}. \quad (15)$$

⁴⁾ Моды с поляризациями $\varepsilon_\alpha^{(1)}$ и $\varepsilon_\alpha^{(2)}$ соответствуют так называемым параллельной (\parallel) и перпендикулярной (\perp) модам в обозначениях Адлера [14].

Фотон третьей моды, $\lambda = 3$, является нефизическим [9]. Действительно, подставляя выражение для $\mathcal{P}^{(3)}(q)$ в уравнение (14), можно легко убедиться, что единственным решением данного уравнения является $q^2 = 0$. Это приводит к тому, что вклад третьей моды в решение (10) оказывается пропорционален полной дивергенции и может быть устранен соответствующим калибровочным преобразованием.

В пределе сильного магнитного поля только мода с вектором поляризации $\varepsilon_\mu^{(2)}$ может распадаться на электрон-позитронную пару, поскольку только собственное значение поляризационного оператора $\mathcal{P}^{(2)}(q)$ (13) имеет мнимую часть при $q_\parallel^2 \geq 4m_e^2$. Таким образом, для анализа временного затухания электромагнитного поля достаточно в выражении (10) рассмотреть только слагаемое с $V_\alpha^{(2)}(x)$.

Для упрощения дальнейших вычислений удобно перейти в систему отсчета, где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$, что всегда можно сделать, не нарушая характера внешнего магнитного поля. При этом $q_\parallel^2 = q_0^2$ и вектор поляризации моды 2 принимает вид $\varepsilon_\alpha^{(2)} = (0, 0, 0, -1)$. В итоге для $V_\alpha^{(2)}(x)$ получаем следующее выражение:

$$V_\alpha^{(2)}(x) = V_\alpha^{(2)}(0, \mathbf{x}) \frac{\text{Re } F(t)}{\text{Re } F(0)}, \quad (16)$$

где

$$F(t) = \int_C \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{e^{-iq_0 t}}{(q_0 - i\varepsilon)(q_0^2 - \mathbf{k}^2 - \mathcal{P}^{(2)}(q))}, \quad (17)$$

$$V_\alpha^{(2)}(0, \mathbf{x}) = 2\varepsilon_\alpha^{(2)} j_3 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Re } F(0).$$

Контур интегрирования C в (17) определяется аналитическими свойствами $\mathcal{P}^{(2)}(q)$ и изображен на рис.1. Функция $\mathcal{P}^{(2)}(q)$ является аналитической на

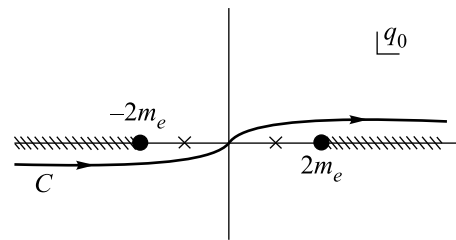


Рис.1. Контур интегрирования C в комплексной плоскости q_0 . Крестиками обозначены полюса, соответствующие вещественным решениям уравнения дисперсии (14). Штриховкой указаны разрезы вдоль вещественной оси

комплексной плоскости q_0 с разрезами вдоль вещественной оси, см. рис.1. В кинематической области

$|q_0| < 2m_e$ собственное значение $\mathcal{P}^{(2)}(q)$ вещественно, и в этом случае уравнение (14) имеет вещественные корни, которые определяют дисперсию фотона в данной области.

Для дальнейшего анализа контур интегрирования удобно преобразовать в контур, изображенный на рис.2. Тогда интеграл (17) может быть представлен

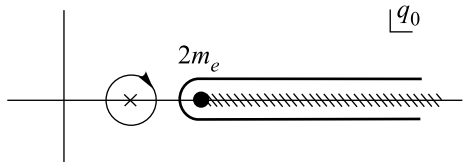


Рис.2. Контур интегрирования C после преобразования, позволяющего выделить отдельно вклад полюса, $F_{pole}(t)$ и разреза $F_{cut}(t)$

в форме двух слагаемых

$$F(t) = F_{pole}(t) + F_{cut}(t), \quad (18)$$

первое из которых определяется вычетом в точке $q_0 = \omega$, являющейся решением уравнения дисперсии (14). Оно соответствует незатухающему решению в области $\omega < 2m_e$ [9]. Второе слагаемое определяет зависимость электромагнитного поля от времени в области выше порога рождения электрон-позитронной пары и имеет вид фурье-интеграла:

$$F_{cut}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} F_{cut}(q_0) e^{-iq_0 t}, \quad (19)$$

$$F_{cut}(q_0) = \frac{2\theta(q_0 - 2m_e)I}{q_0([q_0^2 - \mathbf{k}^2 - R]^2 + I^2)}, \quad (20)$$

$$R \equiv \text{Re } \mathcal{P}^{(2)}(q_0) = \frac{\alpha}{\pi} eB \left(\frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} + 2 \right), \quad (21)$$

$$I \equiv -\text{Im } \mathcal{P}^{(2)}(q_0 + i\varepsilon) = \frac{\alpha eB}{\sqrt{z(z-1)}}, \quad z = \frac{q_0^2}{4m_e^2}. \quad (22)$$

Выражения (19)–(22) с учетом (16) решают задачу о нахождении временной зависимости волновой функции фотона выше порога рождения пары в присутствии сильного магнитного поля.

Строго говоря, вследствие порогового поведения фурье-образа $F_{cut}(q_0)$ характер временного затухания функции $F_{cut}(t)$, а значит, и волновой функции $\mathcal{A}_\mu(t)$, отличается от экспоненциального. Однако на протяжении некоторого характерного отрезка времени (естественно в качестве такого характерного вре-

мени выбрать обратную эффективную ширину распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$) зависимость волновой функции можно приближенно описать как экспоненциально затухающие гармонические колебания

$$\mathcal{A}_\mu(t) \sim e^{-\gamma_{\text{eff}} t/2} \cos(\omega_{\text{eff}} t + \phi_0). \quad (23)$$

Здесь ω_{eff} и γ_{eff} – эффективная частота и ширина распада фотона, которые должны быть найдены с использованием (19)–(22) для каждого значения импульса \mathbf{k} , что определяет эффективный закон дисперсии фотона выше порога рождения электрон-позитронной пары.

Важную роль в астрофизических приложениях играет величина γ_{eff} , определяющая интенсивность поглощения γ -квантов в магнитном поле за счет рождения e^+e^- -пары. Обычно в астрофизике используют выражение для коэффициента поглощения, полученного на основе вероятности распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$, содержащее корневую сингулярность, см., например, [15]. Как отмечалось в работе [9], это приводит к завышению интенсивности рождения e^+e^- -пар. Наш анализ показывает, что вычисление коэффициента поглощения (ширины распада) с использованием комплексного решения на втором римановом листе [9] также приводит к существенно завышенному результату в окологороговой области, как это видно на рис.3 и рис.4.

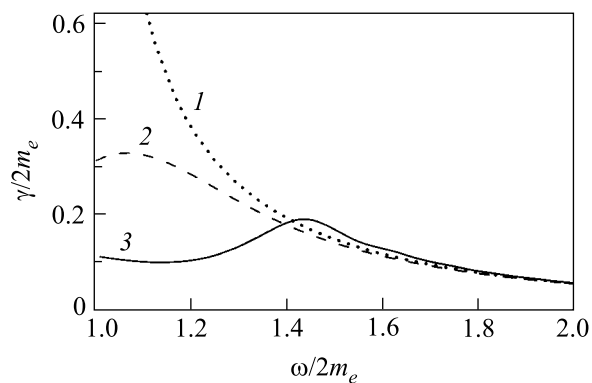


Рис.3. Зависимость ширины распада от частоты в окологороговой области для значений магнитного поля $B = 200B_e$. Линия 1 – ширина распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$, вычисленная в древесном приближении и содержащая корневую сингулярность; линия 2 – ширина распада, полученная из комплексного решения дисперсионного уравнения на втором римановом листе [9]; линия 3 соответствует ширине распада γ_{eff} , вычисленной на основе аппроксимации (23)

Неэкспоненциальный характер затухания в окологороговой области известен для процессов в ваку-

уме и веществе [16, 17], однако во внешнем поле, как нам известно, прежде не рассматривался. В магнитном поле, в отличие от случая вакуума или среды, околопороговый эффект оказывается кинематически усилен, благодаря сингулярному поведению поляризационного оператора в этой области. Поэтому изучение данного явления актуально не только с точки зрения возможных астрофизических приложений, но и представляет концептуальный интерес.

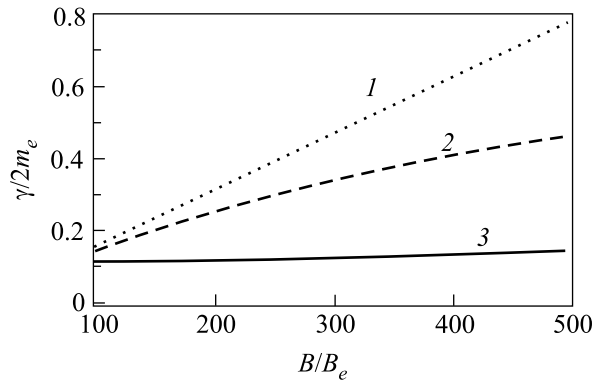


Рис.4. Зависимость ширины распада от величины магнитного поля для значения частоты $\omega = 2.5m_e$. Нумерация линий такая же, что и на рис.3

Авторы благодарят С.С. Герштейна, Г.П. Пронько, В.В. Киселева и А.К. Лиходеда за стимулирующие обсуждения и полезные замечания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант # E00-11.0-5) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 01-02-17334).

1. Г.С. Бисноватый-Коган, С.Г. Моисеенко, *Астрон. журн.* **69**, 563 (1992); G. S. Bisnovatyi-Kogan, *Astron. Astrophys. Trans.* **3**, 287 (1993).
2. R. C. Duncan and C. Thompson, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992); C. Thompson and R. C. Duncan, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275**, 255 (1995).
3. Н. П. Клепиков, *ЖЭТФ* **26**, 19 (1954).
4. P. A. Sturrock, *Astrophys. J.* **164**, 529 (1971).
5. E. Tadermaru, *Astrophys. J.* **183**, 625 (1973).
6. M. A. Ruderman and P. S. Sutherland, *Astrophys. J.* **196**, 51 (1975).
7. В. С. Бескин, *Астрофизика* **18**, 439 (1982).
8. J. K. Daugherty and A. K. Harding, *Astrophys. J.* **273**, 761 (1983).
9. А. Е. Шабал, *Труды ФИАН* **192**, 5 (1988).
10. D. Boyanovsky, H. J. de Vega, Y. J. Ng et al., *Phys. Rev.* **D59**, 105001 (1999).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Статистическая физика*, ч. 2, М.: Наука, 1981.
12. W. Tsai and T. Erber, *Phys. Rev.* **D12**, 1132 (1975).
13. D. V. Melrose and R. J. Stoneham, *Nuovo Cim.* **A32**, 435 (1976).
14. S. L. Adler, *Ann. Phys. N.Y.* **67**, 599 (1971).
15. A. K. Harding, M. G. Baring, and P. L. Gonthier, *Astrophys. J.* **476**, 246 (1997).
16. Л. А. Халфин, *ЖЭТФ* **33**, 1371 (1957).
17. I. Joichi, Sh. Matsumoto, and M. Yoshimura, *Phys. Rev.* **A57**, 798 (1998).