Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 12, с. 763 – 766

Кажущееся аномальное поведение спектра мощности $1/f$-шума и его объяснение

А. Г. Бударин

Государственное научно-производственное объединение Альтаир, 111024 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 мая 2001 г.

Дано объяснение причин кажущегося аномального поведения наблюдаемого спектра мощности $1/f$-шума, отвечающего бесконечной полной мощности источников шума. Описаны физические механизмы, устраняющие эти кажущиеся аномалии. С их учетом в пределах низких и высоких частот получены ограниченные и интегрируемые формы спектра мощности $1/f$-шума, соответствующие известным физическим представлениям о шумовых процессах.

PACS: 05.40.+j, 05.40.-a, 05.45.-a

Низкочастотный случайный сигнал со спектром мощности $F(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$ $(\alpha \sim 1, \omega = 2\pi f)$, называемый $1/f$-шумом, является атрибутом наблюдения самых разнообразных явлений переноса в системах многих частиц, не обязательно физических. Замечательным свойством спектра $1/f$-шума вида $\omega^{-\alpha}$ является его аномальное поведение, заключающееся в его неограниченности вблизи нулевой частоты и расходимости интеграла от него на одном из краев или, при $\alpha = 1$, на обоих краях частотного диапазона. Это свойство, отвечающее нестационарности $1/f$-шума и бесконечной полной мощности его источников, находится в противоречии со свойствами реальных шумовых сигналов, генерируемых и измеряемых в стационарных условиях. Для качественного объяснения этой парадоксальной ситуации неоднократно делалось предположение о существовании таких отличий в поведении $1/f$-спектра в пределах больших и малых частот, которые делали бы его ограниченным и интегрируемым [1].

Целью настоящей работы является доказательство этого предположения путем установления механизмов возникновения отличий спектра $1/f$-шума от стандартной зависимости $\omega^{-\alpha}$ и оценка этих отличий на основе математической теории $1/f$-шума, изложенной в работах [2, 3]. Эта теория утверждает, что $1/f$-шум генерируется в результате диффузионной релаксации флуктуаций физического параметра системы типа ударных волн с характерным степенным распределением его плотности [2, 3], образующих случайную последовательность пуассоновского типа. При этом сам $1/f$-шум есть случайный сигнал, формируемый в результате измерения диффузионных потоков $j_i(x-x_i, t-t_i)$, где x_i, t_i – координата и момент образования i-ой флуктуации, $r(x-x_i, t-t_i)$ – текущее значение плотности параметра при $t > t_i$, $i \in (0, K)$, K – число флуктуаций в пуассоновской последовательности. Условиями того, что спектр $1/f$-шума будет иметь требуемый вид $\omega^{-\alpha}$, являются соотношения $\beta = 3/2 - \alpha$, $\beta \in (0,1)$, $\alpha \in (0.5; 1.5)$ и неравенства $h = (\lambda_1/\omega)^{1/2} \ll 1$, $\delta^2 = (v^2/4\kappa\omega)^2 \ll 1$, где λ_1 – первое собственное значение задачи решения уравнения диффузии $r_t = vr_x + \kappa r_{xx}$ с однородными граничными условиями, описывающего процесс релаксации флуктуаций, v – дрейфовая скорость частиц, κ – коэффициент диффузии.

Рассмотрим вначале область низких частот. В [2, 3] показано, что при $v \neq 0$ частотная зависимость $F(\omega)$ подвергается модификации в виде замены ω на $\omega' = \omega(1+\delta^2)^{1/2}$, приводящей к отличию $1/f$-спектра от $\omega^{-\alpha}$ в области низких частот. Но механизм формирования флуктуаций, определенных в общей модели явления [2 – 4], обязательно предполагает отличную от нуля скорость скачка плотности физического параметра, а следовательно, и отличную от нуля скорость v конвекционного переноса частиц, захваченных флуктуацией. Поэтому в данной теории значение $F(0)$ будет конечным, то есть аномалия спектра $1/f$-шума в области низких частот будет отсутствовать.

Близость $F(\omega)$ к $\omega^{-\alpha}$, отмеченная в эксперименте, имеет в рамках данной теории следующее качественное объяснение. Представим δ^2 как $(v/v_d)^4$, где $v_d = 2(\kappa\omega)^{1/2}$ – величина, характеризующая скорость движения диффузионного фронта от флуктуации после возникновения особенности ее плотности. Наличие этой особенности и быстрота ее образования вследствие опрокидывания фронта флуктуации создают условие превосходства v_d над v, которое и обеспечивает условие $\delta^2 \ll 1$ соблюдения зависимости $F(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$. Например, как следует из [4] и [5], в электрических проводниках с высокой плотностью носителей заряда, v – порядка дрейфовой скорости электронов проводимости V и для типичных значений $\kappa \sim 10^4$ см^2/с, $V \sim 10^{-2}$ см/с и $f = (\omega/2\pi) \sim 1$ с$^{-1}$ величина δ^2 будет $\sim 10^{-19}$, то есть ничтожно мала. Значение $\delta \sim 1$ здесь достигается лишь при $\omega \sim \Omega = v^2/4\kappa \sim 2.5 \cdot 10^{-9}$ Гц. Поэтому для различения спектра $\omega^{-\alpha}$ и $1/f$-спектра, предсказанного данной теорией, потребуется время, превосходящее $\Omega^{-1} \sim 10^2$ лет, недостижимое в эксперименте.

Рассмотрим теперь случай высоких частот. Предполагаемой причиной увеличения затухания спектра $1/f$-шума по сравнению с $\omega^{-\alpha}$ здесь является сглаживающее действие временной корреляции точек траектории частицы в диффузионном потоке, не отраженное в основной модели. Его учет приведет к подавлению наиболее быстрых флуктуаций диффузионного потока и, как следствие, к сужению $1/f$-спектра до интегрируемой формы.

Докажем это предположение путем вычисления асимптотики $F(\omega)$ в высокочастотном пределе с учетом временной корреляции. Для этого обобщим исходную модель [2, 3], положив κ функцией времени, чтобы уравнение диффузии смогло учитывать связанное с корреляцией различие в темпе рассасывания флуктуаций в различные моменты времени. В целях установления вида $\kappa(t)$, перейдя к координате $\xi = x + vt$, приведем уравнение диффузии к каноническому виду $w_t = \kappa(t) w_{\xi\xi}$, где $w(\xi, t) = r(\xi - vt, t)$. Затем двумя способами, статистическим и феноменологическим, вычислим дисперсию $D_\xi = d_\xi^2$ случайного смещения $d_\xi = \xi(t) - \xi(0)$ частицы в потоке и, приравняв друг другу результаты вычислений, найдем искомую функцию $\kappa(t)$.

В первом способе, исходя из связи d_ξ со случайной компонентой скорости частицы $u(t)$ $(\langle u \rangle = 0)$ $d_\xi = \int\limits_0^t u(t')dt'$, находим:

$$D_\xi = \int\limits_0^t \langle u(t')u(t'')\rangle dt'dt'' = 2\int\limits_0^t (t-s)R(s)ds, \quad (1)$$

где $R(|t' - t''|) = \langle u(t')u(t'')\rangle$ – корреляционная функция скорости частицы.

Во втором способе исходим из определения величины $\langle \xi^2(t) \rangle$:

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2(t) w(\xi, t) d\xi \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\xi, t) d\xi. \quad (2)$$

Пренебрегая влиянием границ объекта наблюдения (малым при $h \ll 1$), подставляем в (2) решение уравнения диффузии с $\kappa = \kappa(t)$:

$$w(\xi, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\xi, 0) G(\xi, t; \xi', 0) d\xi', \quad (3)$$

выраженное через его функцию Грина:

$$G(\xi, t; \xi', 0) = (\pi g(t))^{-1/2} \exp[-(\xi - \xi')^2/g(t)], \quad g(t) = 4\int\limits_0^t \kappa(t')dt'. \quad (4)$$

В результате получим феноменологическое выражение для $D_\xi(t)$:

$$D_\xi(t) = 2\int\limits_0^t \kappa(t')dt'. \quad (5)$$

Приравняв (5) его оценке (1), найдем искомую величину

$$\kappa(t) = \int\limits_0^t R(s)ds. \quad (6)$$

Для корреляционной функции

$$R(s) = \kappa_0 \tau^{-1} \exp(-s/\tau)$$

[6] получим

$$\kappa(t) = \kappa_0[1 - \exp(-t/\tau)], \quad D_\xi(t) = 2\tau\kappa_0[t/\tau - (1 - \exp(-t/\tau))], \quad (7)$$

причем при $t/\tau \to 0$ $\kappa(t) \to \kappa_0 t/\tau$, $D_\xi(t) \to \kappa_0 t^2/\tau$, а при $t/\tau \to \infty$ $\kappa(t) \to \kappa_0$, $D_\xi(t) \to 2\kappa_0 t$. Можно показать [6], что такое предельное поведение функций $\kappa(t)$ и $D_\xi(t)$ от вида $R(s)$ не зависит и носит общий характер.

Далее, повторив выкладки работы [2, 3], с заменой $\kappa = \mathrm{const}$ на $\kappa = \kappa(t)$ из (6), придем к представлению $F(\omega)$ в виде ряда

$$G^{(0)}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle b_n^2 \rangle k_n^2 |g_{\omega n0}|^2 \quad (8)$$

с асимптотикой $\langle b_n^2 \rangle \sim (A^2/L) k_n^{-2(1-\beta)}$ $(\beta = 3/2 - \alpha)$, отличающегося от $G^{(0)}(\omega)$ в [2, 3] только видом частотного множителя $|g_{\omega n0}|^2$, в котором здесь

$$g_{\omega n0} = \int\limits_0^{\infty} \kappa(t) \exp(-k_n^2 D(t)/2 + i\omega t) dt. \quad (9)$$

Таким образом, учет временных корреляций в данной задаче сводится к оценке $g_{\omega n0}$. Прямое применение формул асимптотического анализа для нее затруднительно, так как в (9) присутствуют два больших параметра ω и n^2, входящих в $k_n^2 = (\pi n/L)^2$. Но можно показать [7], что при достаточно больших ω оценка заданной точности дается интегралом по малой окрестности $[0, \Delta'(\omega, n^2)]$, неограниченно уменьшающейся с ростом ω, причем, как следует из вида (9), при $n_1 < n_2$ $\Delta'(\omega, n_2^2) < \Delta'(\omega, n_1^2)$. Это позволяет выбрать такие ω_0 и не зависящее от n^2 $\Delta = \Delta(\omega_0)$, что при $\omega \geq \omega_0$ интегральная оценка $g_{\omega n0}$

$$g_{\omega n} = \int_0^{\Delta} \kappa_0(t/\tau) \exp(-\kappa_0 k_n^2 t^2/2\tau + i\omega t)dt, \qquad (10)$$

полученная заменой в (9) верхнего предела ∞ на $\Delta = \Delta(\omega_0)$, а $\kappa(t)$ и $D_\xi(t)$ на их предельные значения, будет иметь заданную точность.

Асимптотическая оценка интеграла (10) проводится путем его преобразования к известным специальным функциям и применением к ним их стандартных разложений в ряд. Введем параметры $\eta = (\omega\tau/2)^{1/2}$, $x = nh$, $\lambda = (\eta x)^2$, $\psi = \eta/x$, $\gamma = \Delta/\tau$, $\zeta = \gamma\lambda^{1/2} - i\psi$, $Q = \pi^{1/2}\kappa_0\tau/2\lambda$, сделаем в аргументе экспоненты замены $\kappa_0 k_n^2 = (nh)^2\omega$, $t = \tau\lambda^{-1/2}(y - i\psi)$, после чего преобразуем (10) к виду

$$g_{\omega n} = Q\exp(-\psi^2)[\mathbf{i}^1\mathrm{erfc}(-i\psi) - $$
$$-\pi^{-1/2}\exp(-\zeta^2) - \mathrm{erfc}(\zeta)]. \qquad (11)$$

Заметив, что для любого x $|\zeta| = |\zeta(x)| \geq (\omega\Delta)^{1/2}$, $\arg\zeta \in (0, -\pi/2)$ и полагая, что $(\omega\Delta)^{1/2} \gg 1$, заменим в (11) $\mathrm{erfc}(\zeta)$ на его асимптотическую оценку $\pi^{-1/2}\zeta^{-1}\mathrm{erfc}(-\zeta^2)$, а вместо $\mathbf{i}^1\mathrm{erfc}(-i\psi)$ подставим ее разложение в ряд (формула (7.2.4) в [8, гл.7]). В результате при $(\omega\Delta)^{1/2} \gg 1$ имеем оценку

$$g_{\omega n} \sim Q\exp(-\psi^2)[(1/2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k(i\psi)^k - W\exp(-\zeta^2)], \qquad (12)$$

где $a_k = 2^k[k!\Gamma((3-k)/2)]^{-1}$ при $k = 1$, $k = 2m$, $m \geq 0$ и $a_k = 0$ при $k = 2m+1$, $m > 0$; $W = W(x,\gamma) = |W|\exp(i\arg W)$, где $|W| = \pi^{-1/2}\gamma x^2((\gamma x^2)^2 + 1)^{-1/2}$, $\arg W = \mathrm{arctg}(\gamma x^2)^{-1}$.

Отсюда найдем общее выражение для $|g_{\omega n}|^2$ при $(\omega\Delta)^{1/2} \gg 1$:

$$|g_{\omega n}|^2 = I_0 = I_1 - I_2 + I_3,$$

$$I_1 = (Q^2/4)\exp(-2(\eta/x)^2)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_k a_j (2-\delta_{kj})(\eta/x)^{k+j}\cos((k-j)\pi/2), \qquad (13)$$
$$I_2 = Q^2|W|\exp[-(\gamma\eta x)^2 - (\eta/x)^2]\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\eta/x)^k\cos(\omega\Delta + \arg W + k\pi/2),$$
$$I_3 = Q^2|W|^2\exp(-2(\gamma\eta x)^2).$$

Подставив $|g_{\omega n}|^2$ в ряд (8) и перейдя тем же путем, как и в [2,3] от суммирования к интегрированию, получим корректную (в силу условия $h \ll 1$) оценку $G_0(\omega)$ спектра $G^{(0)}(\omega)$:

$$G_0(\omega) = G_1(\omega) - G_2(\omega) + G_3(\omega),$$
$$G_i(\omega) = (A^2/\pi L)(\omega/\kappa_0)^{\beta+1/2}\int_0^{\infty} x^{2\beta} I_i(x)dx. \qquad (14)$$

Интегралы в $G_1(\omega)$ заменой переменной $x = \eta(y/2)^{-1/2}$ сводим к интегралам Эйлера 1-го рода [8] и получаем

$$G_1(\omega) = A^2(8L)^{-1}P(\alpha)(\kappa_0\tau)^{\alpha}(\omega\tau)^{-2\alpha},$$
$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_k a_j(2-\delta_{kj})\times \qquad (15)$$
$$\times 2^{-(k+j)/2}\Gamma((k+j)/2+\alpha)\cos((k-j)\pi/2).$$

Интеграл в $G_3(\omega)$ после замены переменной $x = (\gamma\eta)^{-1}(y/2)^{1/2}$ аппроксимируем интегралом Эйлера 1-го рода и получаем

$$G_3(\omega) = (A^2/2\pi L)\Gamma(2-\alpha)(\kappa_0\tau)^{\alpha}\gamma^{2(\alpha-1)}(\omega\tau)^{-2}. \qquad (16)$$

Член $G_2(\omega)$ преобразуем к виду

$$G_2(\omega) =$$
$$= A^2(\kappa_0\tau)^2(\omega/\kappa_0)^{\beta+1/2}|W|(4L\eta^4)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \eta^k,$$
$$f_k = \int_0^{\infty} x^{2\beta-k-4}\exp[-(\gamma\eta x)^2 - (\eta/x)^2]\times$$
$$\times\cos(\omega\Delta + \arg W - k\pi/2)dx. \qquad (17)$$

Асимптотическая оценка интеграла f_k методом Лапласа [7] дает:

$$f_k \sim (\sqrt{\pi}/4)\gamma^{1-\beta+k/2}\exp(-\omega\Delta)\cos(\omega\Delta - (2k-1)\pi/4). \qquad (18)$$

Подставив (18) в (17), получим оценку $G_2(\omega)$ в виде

$$G_2(\omega) \sim q\exp(-\omega\Delta)[S_s\sin(\omega\Delta+\pi/4) + S_c\cos(\omega\Delta+\pi/4)],$$

$$q = (A\kappa_0\tau/4)^2\gamma^{1-\beta}(\sqrt{2}\eta^5 L)^{-1}(\omega/\kappa_0)^{\beta+1/2},$$

$$S_s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega\Delta/2)^{k/2}\sin(k\pi/2),$$

$$S_c = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega\Delta/2)^{k/2}\cos(k\pi/2).$$

Оценка сумм S_s и S_c с использованием тождеств (6.1.17) и (6.1.18) в [8, гл.6] дает:

$$S_s = (2\omega\Delta/\pi)^{1/2},$$

$$S_c = \pi^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}(\omega\Delta/2)^m(m!(m-1/2)^{-1})) \sim$$
$$\sim O(\exp(\omega\Delta/2)).$$

Поэтому член $G_2(\omega)$ оказывается порядка $\exp(-\omega\Delta/2)$ и, как экспоненциально малый, должен быть исключен из суммы (14).

Отсюда следует, что высокочастотная асимптотика $1/f$-спектра при $(\omega\Delta)^{1/2} \gg 1$ имеет зависимость $\omega^{-2\alpha}$ при $\alpha \leq 1$ или ω^{-2} при $\alpha > 1$ и является интегрируемой. В силу независимости предельных форм $\kappa(t)$ и $D_\xi(t)$ от вида корреляционной функции $R(s)$ полученный результат от него также не зависит и в этом смысле является общим. Следует заметить, что времена корреляции скоростей частиц в диффузионных процессах обычно малы и потому найденная высокочастотная ветвь $1/f$-спектра окажется практически недоступной наблюдению.

Таким образом, в рамках математической теории $1/f$-шума, предложенной в работах [2, 3], описаны физические механизмы регуляризации $1/f$-спектра на краях частотного диапазона. Спектр, найденный с их учетом, оказывается ограниченным и интегрируемым на всей оси частот и не содержащим аномалий, противоречащих определению спектра стационарного случайного процесса и физическим представлениям о шумах. Причиной их кажущегося наличия здесь является практическая недостижимость в эксперименте краев $1/f$-спектра, отличных от его известной аномальной формы $\omega^{-\alpha}$.

1. М. Букингем, *Шумы в электронных приборах и системах*, М.: Мир, 1986 (M. J. Buckingham, *Noise in electronic devices and systems*, John Wiley & sons, 1983).
2. А. Г. Бударин, ДАН **359**, 615 (1998).
3. А. Г. Бударин, Радиотехника №11, 8 (1997).
4. А. Г. Бударин, ДАН **372**, 326 (2000).
5. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М.: Наука, 1987.
6. G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. **20**, 196 (1921–1922).
7. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, М.: Наука, 1977.
8. М. Абрамовитц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М.: Наука, 1979.